

Gara a squadre di Campobasso (29 Gen 2011)

Esercizio 1. Qual è il più piccolo intero positivo che possiede esattamente 30 divisori positivi?

Esercizio 2. Qual è la probabilità di ottenere un tris nel poker all'italiana con 36 carte? Se la frazione ridotta ai minimi termini è $\frac{p}{q}$, rispondere con $p + q$.

Esercizio 3. Ho una torta quadrata di 392 mm di lato. Voglio tagliare 7 porzioni di uguale volume mediante 7 tagli rettilinei che partono dal centro del quadrato e arrivano fino al bordo. Il primo taglio arriva in un vertice del quadrato. Supponendo che lo spessore della torta sia costante, determinare a quanti mm di distanza da quel vertice arriva il taglio che delimita la prima fetta.

Esercizio 4. Siano α, β, γ le radici di $x^3 - 6x + 5$. Quanto vale $\alpha^2\beta + \beta^2\gamma + \gamma^2\alpha + \beta^2\alpha + \gamma^2\beta + \alpha^2\gamma$?

Esercizio 5. Qual è il massimo valore che può assumere $a \cdot b \cdot c$ sapendo che $250a10b3155c6$ è multiplo di 396?

Esercizio 6. Ogni anno si organizzano i campionati mondiali di combinata scacchi-pugilato, che consiste in round di boxe alternati a partite a scacchi, e finisce con un matto o un K.O. (informarsi per credere). Durante l'ultima fase degli allenamenti, ci sono 24 atleti, ognuno impegnato in almeno una delle due discipline. Tra loro possono organizzare 136 partite a scacchi (tra scacchisti) oppure 55 incontri tra pugili, ruotando tra tutte le coppie possibili. Quanti incontri combinati di scacchi-pugilato si possono fare se non si vuol ripetere una partita con gli stessi atleti? (Per evitare partite troppo squilibrate, ovviamente si vietano gli scontri tra chi pratica entrambe le discipline e chi ne fa solo una; inoltre gli incontri tra "scacchisti puri" o "pugili puri" sono giudicati troppo noiosi)

Esercizio 7. Quale sarà il prossimo anno che è somma di 7 interi consecutivi, 8 interi consecutivi ma anche 9 interi consecutivi?

Esercizio 8. Lo scettro del mago Bobo è un cilindro istoriato alto 235 cm e con una circonferenza di base di 4 cm. Questo scettro presenta un'incisione che sale ad elica lungo di esso; il segmento che congiunge l'inizio e la fine di tale scanalatura è parallelo all'asse dello scettro, ed è diviso dall'incisione in 141 parti uguali. Determinare quanto è lunga la scanalatura (in cm).

Esercizio 9. Nel reparto di neonatologia nell'ospedale di Campobasso sono appena nati tre bambini: Gilberto, Cassandra e Giordano. I medici vorrebbero sapere il loro peso ma purtroppo la bilancia elettronica è rotta e non mostra pesi inferiori ai 5 Kg. Decidono allora di pesare i bambini a due a due ottenendo i seguenti risultati:

- Gilberto e Cassandra insieme: 7047 g;
- Cassandra e Giordano insieme: 6789 g;
- Giordano e Gilberto insieme: 7356 g;

Determinare il peso di Cassandra in grammi.

Esercizio 10. Siano a e b due numeri interi positivi. Qual è il valore minimo di $a + b$ affinché $91ab^2$ e $286ab$ siano entrambi quadrati perfetti?

Esercizio 11. Il triangolo ABC è isoscele (su base AB) e ci sono due punti A', B' rispettivamente sui lati BC, AC . Inoltre sono isosceli pure i triangoli $AA'B$ su base $A'B$, $BB'A$ su base $B'A$, $AA'C$ su base AC , $BB'C$ su base BC . Sia C' l'intersezione di BB' e CC' . Quanto vale in gradi l'angolo $A'C'B'$?

Esercizio 12. Alberto e Barbara si vengono incontro lungo una strada dritta. All'inizio distano 13 km. Sapendo che Alberto va ad una velocità di 12 m/s mentre Barbara va ad una velocità di 13 m/s, quanti metri avrà percorso Alberto quando si incontrano?

Esercizio 13. Qual è il prossimo anno la cui agenda sarà la stessa del 2011? Per stessa agenda si intende che allo stesso giorno del mese corrisponde lo stesso giorno della settimana per tutti i giorni dell'anno.

Esercizio 14. Ho scritto sulla lavagna i numeri da 1 a 2011. L'unica mossa consentita è cancellare 2 numeri e sostituirli con la loro somma sommata al loro prodotto (cancello x e y e scrivo $x + y + xy$). Ripeto più volte questa mossa fino a che non rimango con un solo numero. Quale può essere la cifra delle unità di questo numero? (rispondere scrivendo la somma di tutte le possibili ultime cifre dell'ultimo numero)

Esercizio 15. Ad una riunione di famiglia sono presenti tutti i nipotini. Si sa che la somma delle loro età è 20. Quanto è al massimo il prodotto delle loro età?

Esercizio 16. Del triangolo ABC si sa che $BC = 182\text{cm}$. Inoltre, essendo O il circocentro e N, M i punti medi di AB, AC , si ha anche $ON = 35\text{cm}$ e $OM = 84\text{cm}$. Quanti centimetri misura il perimetro di ABC ?

Esercizio 17. In un quadrato $ABCD$ di lato 1, si prendono 4 punti X, Y, Z, T sui lati AB, BC, CD, DA in modo che $AX = BY = CZ = DT = \frac{1}{n}$, dove n è la risposta a questo problema. Trovatelo, sapendo che la figura ottenuta intersecando i parallelogrammi $AXCZ$ e $BYDT$ ha area $\frac{1}{1985}$.

Esercizio 18. Maria ha un sacco con perle bianche o verdi, tantissime per ogni colore e in egual numero. Questa mattina ne ha scelte quattro a caso per farne una collana, poi si è guardata allo specchio ed è andata al lavoro. Durante il giorno ha ballato, corso, saltato, piroettato, e le perle della collana si sono rigirate un numero imprevedibile di volte, ma la sera torna a guardarsi allo specchio e -che strano- trova i colori nello stesso ordine! Sapreste dire la probabilità che questo accada? Esprimere la probabilità come una frazione ridotta ai minimi termini, e rispondere con la somma di numeratore e denominatore.

Esercizio 19. Quando Re Artù dalla tavola rotonda invita nella sua villa i 18 fedeli cavalieri, fa portare assieme a loro 24 belle donzelle. Durante la cena nessun uomo vuole sentirsi solo e vuole due fanciulle ai suoi fianchi. Il servo con il compito di apparecchiare dovrà porre un fazzoletto rosa sui posti riservati alle donne, e uno blu sui posti per gli uomini. In quanti modi può disporre i fazzoletti? (Due disposizioni sono da considerarsi uguali a meno di rotazioni)

Esercizio 20. Nei laboratori biotecnologici dell'Università di Lepanto si vuole studiare un nuovo pericoloso tipo di batteri, con la particolarità che dopo un tempo fisso ogni batterio si divide in tre! Poichè all'inizio vi è un unico esemplare, un ricercatore decide di metterlo in una coltura ed aspettare che si riproduca un numero sufficiente di volte. Dopo un certo periodo, il ricercatore riesamina la coltura e conta il numero di batteri, che però è ancora insufficiente per condurre gli studi. Passato un altro po' di tempo, il ricercatore racconta i batteri e nota che ora ce ne sono 2106 in più rispetto al conteggio precedente. Determinare quanti batteri ci sono nella coltura al secondo conteggio.

Esercizio 21. VYZ, VYX, VVW sono tre interi consecutivi in base 5, presi in ordine crescente. A lettera diversa corrisponde una cifra diversa (tra 0,1,2,3,4). Determinare l'espressione in base 10 di XYZ .

Problemi dimostrativi

Esercizio 22. Determinare le coppie di numeri primi (p, q) tali che $(p + 1)^q$ è un quadrato perfetto.

Esercizio 23. A Matelandia c'è una piazza circolare che è un'enorme aiuola erbosa. Sulla circonferenza di questa piazza nell'ordine, sono disposti: un arbusto secolare, un bar, un cinema, il dentista di paese, un altro cinema e un altro bar. Si sa che l'arbusto, i due bar e il dentista sono i vertici di un quadrato. Per ogni coppia di questi singoli posti c'è una stradina che li collega; all'incrocio tra la stradina arbusto-cinema e bar-altro cinema c'è una fontana (quindi ci sono due fontane). C'è anche una stradina che collega le due fontane. Dimostrare che essa è parallela a quella che collega i due bar.

Esercizio 24. Sia dato un polinomio $p(x)$ a coefficienti interi. Sapendo che sia $p(0)$ che $p(1)$ sono dispari, dimostrare che $p(x)$ non può avere radici intere.

Esercizio 25. Ho una tabella rettangolare con 20 colonne. Ho colorato in nero delle caselle in modo che in ogni colonna ci sono 3 caselle nere e non ci sono due righe con lo stesso numero di caselle nere. Dimostrare che il numero di righe è ≤ 11