

UNIVERSITA' DELLA CALABRIA
FACOLTA' DI INGEGNERIA

- Seconda prova scritta di CALCOLO 3 -

APPELLO DEL 6/9/2005

COGNOME:

NOME:

MATRICOLA O DATA DI NASCITA:

IMPORTANTE

Il presente fascicolo contiene gli esercizi.

**I risultati e lo svolgimento relativo vanno riportati negli appositi spazi:
un campo vuoto significa zero punti**

Nei grafici é fondamentale il posizionamento dei vari elementi mentre sono irrilevanti i fattori di scala.

Gli esercizi valgono 25 punti il primo, 22 punti il secondo, 15 punti il terzo, 10 punti il quarto, 8 punti il quinto.

SPAZIO RISERVATO ALLA COMMISSIONE

--	--	--	--	--

--	--

A

Esercizio 1. Siano

$$f(x, y) = \left(\frac{y}{x} + 1\right)^{-1} \frac{1}{(x+y)^4}.$$

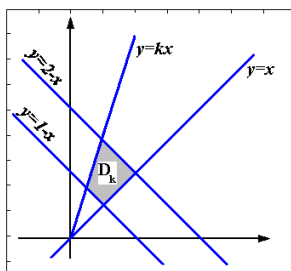
e per ogni $k \in (1, +\infty)$

$$D_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, 1-x \leq y \leq 2-x, x \leq y \leq kx\}.$$

Si chiede

una rappresentazione grafica di D_k ;

Svolgimento



un cambiamento di variabili che consenta il calcolo dell'integrale di $f(x, y)$ su D_k ;

Svolgimento

Un possibile cambiamento di variabili è il seguente:

$$\begin{cases} v = y + x & 1 \leq v \leq 2 \\ u = \frac{y}{x} & 1 \leq u \leq k \end{cases}$$

da cui possiamo ricavare le coordinate x e y in funzione di u e v .

$$\begin{cases} v = y + x \\ y = ux \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = ux + x \\ y = ux \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = x(u+1) \\ y = ux \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{v}{(u+1)} \\ y = \frac{uv}{(u+1)} \end{cases}.$$

Indicata con ψ la trasformazione che esprime x e y in funzione di u e v , si ha:

$$\det D\psi(u, v) = \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} -\frac{v}{(u+1)^2} & \frac{1}{u+1} \\ \frac{v}{(u+1)^2} & \frac{u}{u+1} \end{pmatrix} = -\frac{vu}{(u+1)^3} - \frac{v}{(u+1)^3} = -\frac{v(u+1)}{(u+1)^3} = -\frac{v}{(u+1)^2}$$

e quindi:

$$\left| \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \frac{v}{(u+1)^2}$$

Nelle nuove variabili si ha:

$$\psi^{-1}(D_k) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq v \leq 2, 1 \leq u \leq k\}.$$

il valore dell'integrale di $f(x, y)$ esteso a D_k .

Svolgimento

$$\begin{aligned} \int_{D_k} \left(\frac{y}{x} + 1\right)^{-1} \frac{1}{(x+y)^4} dx dy &= \int_{\psi^{-1}(D_k)} (u+1)^{-1} \frac{1}{(v)^4} \frac{v}{(u+1)^2} du dv = \int_1^k \frac{du}{(u+1)^3} \int_1^2 \frac{dv}{v^3} = \\ &= \int_1^k \frac{du}{(u+1)^3} \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{v^2} \right]_1^2 = \frac{3}{8} \int_1^k \frac{du}{(u+1)^3} = \frac{3}{8} \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(u+1)^2} \right]_1^k = -\frac{3}{16} \left[\frac{1}{(k+1)^2} - \frac{1}{4} \right]. \end{aligned}$$

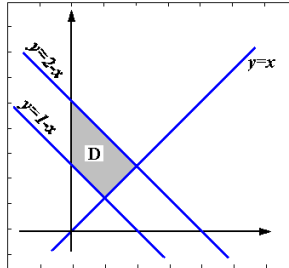
Sia

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, y \geq x, 1 - x \leq y \leq 2 - x\} .$$

Si chiede:

una rappresentazione grafica di D ;

Svolgimento



il valore dell'integrale di $f(x, y)$ esteso a D .

Svolgimento

$$\int_D \left(\frac{y}{x} + 1\right)^{-1} \frac{1}{(x+y)^4} dx dy = \lim_{k \rightarrow 0} \int_{D_k} \left(\frac{y}{x} + 1\right)^{-1} \frac{1}{(x+y)^4} dx dy = \lim_{k \rightarrow 0} \left(-\frac{3}{16}\right) \left[\frac{1}{(k+1)^2} - \frac{1}{4}\right] = \frac{3}{64} .$$

Esercizio 2. Sia ω la forma differenziale definita da:

$$\omega(x, y) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} dx + \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dy .$$

Si chiede

di determinare il dominio di definizione di ω

Svolgimento

La forma differenziale è definita in

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$$

di dire se ω è chiusa

Svolgimento

Per verificare se $\omega(x, y)$ è chiusa bisogna calcolare le derivate miste e confrontare se sono uguali.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left(\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \right)}{\partial y} &= \frac{2x(x^2+y^2)^2 - 8xy^2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4} = \frac{2x^3 - 8xy^2}{(x^2+y^2)^3} \\ \frac{\partial \left(\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \right)}{\partial x} &= \frac{-2x(x^2+y^2)^2 - 4x(y^2-x^2)(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4} = \frac{2x^3 - 8xy^2}{(x^2+y^2)^3} \end{aligned}$$

di calcolare l'integrale di ω lungo la circonferenza di raggio 1 centrata nell'origine e percorsa una sola volta in senso antiorario

Svolgimento

Indicata con C la circonferenza parametrizzata da

$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)), \quad t \in [0, 2\pi] ,$$

Si ha:

$$\begin{aligned} \int_C \omega \, ds &= \int_0^{2\pi} (2 \cos t \cdot \sin t \cdot (-\sin t) + (\sin^2 t - \cos^2 t) \cdot (\cos t)) \, dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (-2 \cos t \cdot \sin^2 t + \sin^2 t \cos t - \cos^3 t) \, dt = \int_0^{2\pi} (\cos t \cdot (-2 \sin^2 t + \sin^2 t - \cos^2 t)) \, dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos t (-\sin^2 t - \cos^2 t)) \, dt = \int_0^{2\pi} -\cos t \, dt = [\sin t]_0^{2\pi} = 0 . \end{aligned}$$

di dire se ω è esatta nel suo dominio di definizione*Svolgimento***I MODO di procedere**

La forma è esatta in un insieme semplicemente connesso che non contiene $(0,0)$ perchè è chiusa, quindi l'integrale lungo una qualsiasi curva chiusa, contenuta nell'insieme, è nullo.

L'integrale lungo una qualsiasi curva chiusa che contiene al suo interno $(0,0)$ è nullo poichè, applicando la formula di Gauss-Green, essendo la forma chiusa l'integrale è uguale a quello calcolato lungo la circonferenza di raggio 1 centrata nell'origine.

Quindi possiamo concludere che la forma è esatta perchè l'integrale lungo qualsiasi curva chiusa contenuta nel suo dominio è nullo.

II MODO di procedere

Sappiamo che, per definizione di forma esatta, deve esistere una funzione $\phi(x,y)$ tale che:

$$\frac{\partial(\phi(x,y))}{\partial x} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

e che

$$\frac{\partial(\phi(x,y))}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Per cui calcoliamo la primitiva integrando $\frac{\partial(\phi(x,y))}{\partial x} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$ rispetto a x

$$\phi(x,y) = \int \left(\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \right) dx = -\frac{y}{x^2+y^2} + g(y)$$

Ora deriviamo parzialmente rispetto a y la funzione trovata:

$$\frac{\partial(\phi(x,y))}{\partial y} = -\frac{(x^2+y^2)-2y^2}{(x^2+y^2)^2} + g'(y) = -\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} + g'(y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + g'(y)$$

Dalla seconda uguaglianza $\frac{\partial(\phi(x,y))}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$ si ha:

$$\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + g'(y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + 2x$$

Da cui $g'(y) = 0$ ovvero $g(y) = c$ dove c è una costante, $c \in \mathbb{R}$.

Quindi possiamo concludere che una primitiva di ω è:

$$\phi(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} + c$$

Osserviamo che il dominio di $\phi(x,y)$ è $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ e quindi è definita su tutto il dominio di ω ; pertanto ω è esatta su tutto il suo dominio di definizione.

Sia $\tilde{\omega}$ la forma differenziale definita da:

$$\tilde{\omega}(x, y) = \left[\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{y-2}{x^2 + y^2 - 4y + 4} \right] dx + \left[\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{x}{x^2 + y^2 - 4y + 4} \right] dy .$$

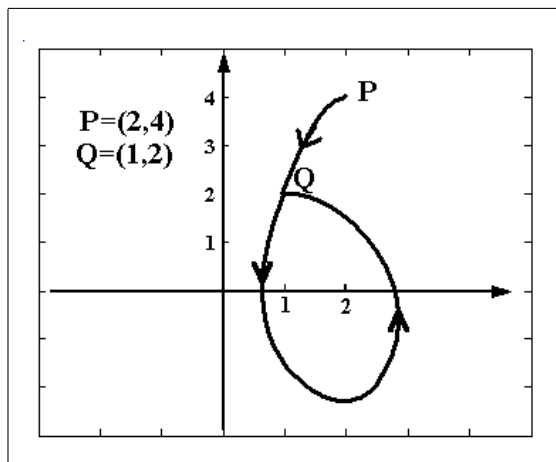
calcolare l'integrale di $\tilde{\omega}$ lungo la curva disegnata in figura

Svolgimento

Per calcolare l'integrale si può scrivere

$$\tilde{\omega}(x, y) = \omega(x, y) - \omega_1(x, y)$$

dove:



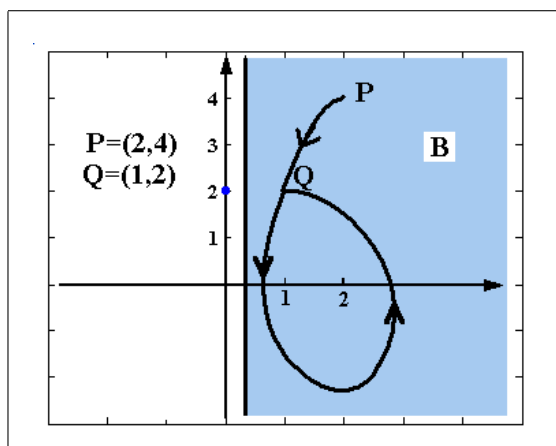
$$\omega(x, y) = \left(\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \right) dx + \left(\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) dy \quad e \quad \omega_1(x, y) = \left(-\frac{y-2}{x^2 + (y-2)^2} \right) dx + \left(\frac{x}{x^2 + (y-2)^2} \right) dy$$

Possiamo osservare che $\tilde{\omega}$ è esatta in B infatti ω è esatta in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$ e ω_1 è esatta nell'insieme semplicemente connesso B che non contiene $(0, 2)$.

Per calcolare

$$\int_{C_2} \omega_1 ds$$

osserviamo che la forma non è esatta in A , ma è esatta in un sottoinsieme B (in figura) di A , che non contiene il punto $(1, 2)$, dunque $\int_{C_2} \omega_1 ds$ non dipende dal percorso ma solo dal punto finale e dal punto iniziale.



Pertanto l'integrale non dipende dal percorso ma solo dal punto iniziale e dal punto finale. La primitiva di $\tilde{\omega}$ è la somma delle primitive di ω e ω_1 , ovvero

$$\phi_{\tilde{\omega}}(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} - \arctan\left(\frac{y-2}{x}\right)$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \tilde{\omega} ds &= \phi_{\tilde{\omega}}(1, 2) - \phi_{\tilde{\omega}}(2, 4) = \\ &= -\frac{2}{1^2 + 2^2} - \arctan\left(\frac{2-2}{1}\right) + \frac{4}{2^2 + 4^2} + \arctan\left(\frac{4-2}{2}\right) = -\frac{2}{5} - \arctan(0) + \frac{4}{20} + \arctan(1) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Esercizio 3. Sia data la seguente equazione differenziale:

$$(x-1)y' - (x-2)y = e^x \quad (1)$$

e si indichi con $\bar{y}(x)$ la soluzione di (1) che soddisfa la condizione $\bar{y}(0) = -1$.

Si chiede

di trovare la soluzione generale dell'equazione (1)

Svolgimento

$$(x-1)y' - (x-2)y = e^x \Rightarrow y' = \frac{x-2}{x-1}y + \frac{e^x}{x-1}$$

Risolviamo l'equazione applicando la formula di risoluzione per equazioni lineari del I ordine:

$$y(x) = e^{A(x)} \left[\int \left(e^{-A(x)} b(x) \right) dx + c \right]$$

dove

$$A(x) = \int a(x) dx = \int \frac{x-2}{x-1} dx = \int \frac{x-1-1}{x-1} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x-1} \right) dx = x - \ln|x-1|$$

e $b(x) = \frac{e^x}{x-1}$.

Quindi si ha:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{x-\ln|x-1|} \left[\int \left(e^{-(x-\ln|x-1|)} \frac{e^x}{x-1} \right) dx + c \right] = e^x e^{-\ln|x-1|} \left[\int \left(e^{-x} e^{\ln|x-1|} \frac{e^x}{x-1} \right) dx + c \right] = \\ &= \frac{e^x}{|x-1|} \left[\int \left(|x-1| \frac{e^x e^{-x}}{x-1} \right) dx + c \right] = \frac{e^x}{|x-1|} \left[\int \left((x-1) \operatorname{sign}(x-1) \frac{1}{x-1} \right) dx + c \right] = \\ &= \frac{e^x}{|x-1|} \left[\int \operatorname{sign}(x-1) dx + c \right] = \frac{e^x}{|x-1|} [x \operatorname{sign}(x-1) + c] = \\ &= \frac{e^x}{(x-1) \operatorname{sign}(x-1)} [x \operatorname{sign}(x-1) + c] = \frac{x e^x}{(x-1)} + \frac{c e^x}{(x-1)} \end{aligned}$$

Da cui la soluzione dell'equazione differenziale è:

$$y(x) = \frac{e^x (x+c)}{(x-1)}$$

Ora risolviamo il problema di Cauchy. Determiniamo la costante imponendo la condizione iniziale $\bar{y}(0) = -1$.

$$y(0) = \frac{e^0 (0-1)}{(0-1)} = -1 \quad \Rightarrow \quad \frac{c}{-1} = -1 \quad \Rightarrow \quad c = 1$$

da cui segue che la soluzione del problema di Cauchy è:

$$\bar{y}(x) = \frac{e^x (x+1)}{(x-1)}$$

di studiare gli eventuali asintoti di $\bar{y}$

Svolgimento

Il dominio di $\bar{y}(x)$ è $R \setminus \{1\}$.

Asintoti verticali:

Calcoliamo i limiti per $x \rightarrow 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^x (x+1)}{(x-1)} = -\infty \qquad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^x (x+1)}{(x-1)} = +\infty$$

$x=1$ è asintoto verticale

Asintoti orizzontali:

Calcoliamo i limiti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x (x+1)}{(x-1)} = +\infty \qquad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x (x+1)}{(x-1)} = 0$$

$y=0$ è asintoto orizzontale

Asintoti obliqui:

Dobbiamo vedere se c'è un asintoti obliquo per $x \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\bar{y}(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x (x+1)}{x (x-1)} = +\infty$$

Non ci sono asintoti obliqui.

di determinare una soluzione di (1) che non abbia asintoti verticali e dire se possono esistere altre soluzioni di (1) con questa proprietà

Svolgimento

Le soluzioni di (1) sono

$$y(x) = \frac{e^x (x+c)}{x-1}$$

Una soluzione che non ha asintoti verticali si ottiene per $c = -1$ ovvero $y(x) = \frac{e^x (x-1)}{x-1} = e^x$ ed l'unica soluzione che non ha asintoti verticali

Esercizio 4. Sia $y(x)$ la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = e^{y^2-4y+3} - 1 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Si chiede di studiare le seguenti proprietà di $y(x)$:

limitatezza

Svolgimento

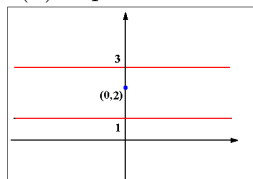
Detta $f(x, y) = e^{y^2-4y+3} - 1$, si ha che f è continua e $\frac{\partial(f(x, y))}{\partial y} = e^{y^2-4y+3}(2y - 4)$, essendo continua in $\mathbb{R}^2$, ($\forall x$ fissato) è limitata su ogni intervallo limitato.

Pertanto, essendo verificate le ipotesi del TEOREMA DI CAUCHY, esiste una unica soluzione del problema di Cauchy assegnato.

Osserviamo inoltre che le funzioni costanti $u(x) = 1$ e $v(x) = 3$ sono soluzioni rispettivamente dei due seguenti problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = e^{y^2-4y+3} - 1 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y' = e^{y^2-4y+3} - 1 \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

Dunque la soluzione $\bar{y}(x)$, che deve passare per il punto $(0, 2)$, non può intersecare i grafici di $u(x)$ e $v(x)$ e quindi deve rimanere limitata dalle due rette di equazioni $y = 1$ e $y = 3$, ovvero: $1 < \bar{y}(x) < 3$



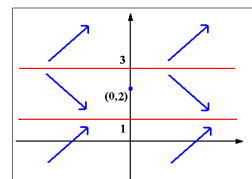
Quindi la soluzione è limitata.

monotonia

Svolgimento

Osserviamo che $y(x)$, essendo limitata, è una soluzione in grande e quindi il dominio di $y(x)$ coincide con il dominio dell'equazione, che è $\mathbb{R}$.

Per studiare la monotonia di $y(x)$ in $\mathbb{R}$, possiamo studiare il segno di y' ovvero di $e^{y^2-4y+3} - 1$, che è crescente se $y < 0$ e $y > 3$ e decrescente per $0 < y < 3$.



Quindi dal punto precedente otteniamo che la soluzione $\bar{y}(x)$ è sempre decrescente.

convessità/concavità*Svolgimento*

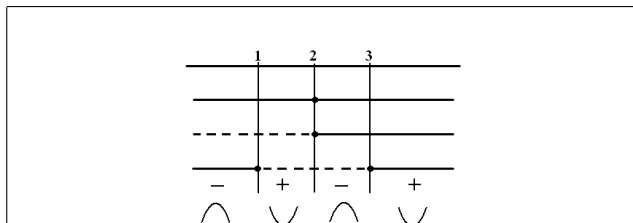
Per studiare la convessità/concavità dobbiamo studiare:

$$y'' > 0 \Rightarrow e^{y^2-4y+3}(2y-4)(y') > 0$$

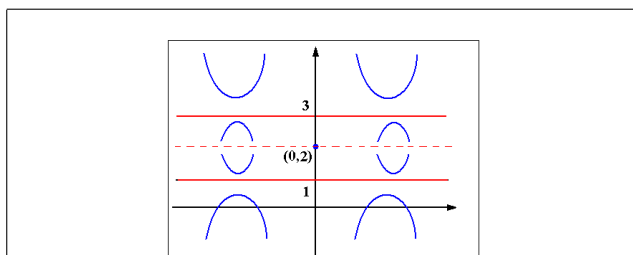
$$e^{y^2-4y+3} > 0 \Rightarrow \text{sempre}$$

$$2y - 4 > 0 \Rightarrow y > 2$$

$$y' > 0 \Rightarrow y < 0 \quad y > 3$$



Da cui segue che la soluzione $\bar{y}(x)$ è concava per $x > 0$ e convessa per $x < 0$.

**asintoti***Svolgimento*

Essendo limitata, $\bar{y}(x)$ non può avere asintoti nè verticali nè obliqui.

Inoltre, essendo strettamente decrescente, quando x tende a $+\infty$ o a $-\infty$ $y(x)$ non può oscillare e quindi ci devono essere due asintoti orizzontali. Per calcolarli, osserviamo che:

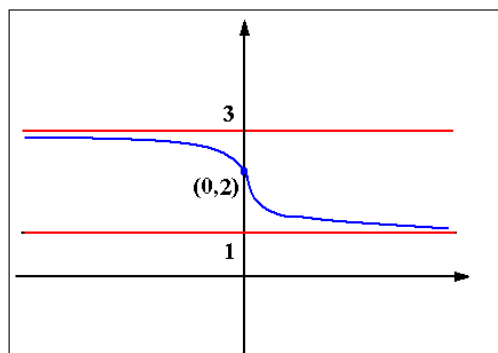
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \bar{y}(x) = l \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} y'(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} [e^{y^2(x)-4y(x)+3} - 1] = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} [y^2(x) - 4y(x) + 3] = 0$$

per cui, per $x \rightarrow +\infty$, $y(x)$ può tendere o a 1 o a 3, ma, ricordando la stretta decrescenza di y e il fatto che $1 < y(x) < 3$, allora il secondo va escluso. Quindi concludiamo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 1.$$

Ragionando in maniera analoga quando x tende a $-\infty$, si ottiene:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = 3.$$

disegnare un grafico qualitativo di $y(x)$ *Svolgimento*

Esercizio 5. Sia $f(x) = \log(1+x)$. Si chiede
di scrivere la serie di Taylor (centrata in 0) di $f(x)$
Svolgimento

La serie di Taylor, centrata in 0, di $f(x)$ è:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(0) \frac{(x-0)^k}{k!}$$

Calcoliamo le derivate di $f(x)$ in $x=0$

$$f(x) = \log(1+x) \quad \implies \quad f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \quad \implies \quad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \quad \implies \quad f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \quad \implies \quad f'''(0) = 1$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{2 \cdot 3}{(1+x)^4} \quad \implies \quad f^{(4)}(0) = 1$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{(k-1)!}{(1+x)^k} \quad \implies \quad f^{(k)}(0) = (-1)^{k+1} (k-1)!$$

La serie di Taylor è:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(0) \frac{(x-0)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} (k-1)! \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$$

di dire per quali $x \in \mathbb{R}$ questa serie converge

Svolgimento

La serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$$

è una serie di potenze. Il raggio di convergenza della serie è $r = \frac{1}{l}$ dove l può essere calcolato utilizzando una delle due formule

$$l = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

e

$$l = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$$

Nella serie in questione $a_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k}$, dunque

$$\begin{aligned} l &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{k+2}}{(k+1)}}{\frac{(-1)^{k+1}}{k}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{k+2} k}{(-1)^{k+1} (k+1)} \right| \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{k+1} \cdot (-1) \cdot k}{(-1)^{k+1} (k+1)} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{-k}{(k+1)} \right| = 1 \end{aligned}$$

Pertanto il raggio di convergenza della serie è $r = \frac{1}{l} = 1$

La serie converge per $|x| < 1$. Osserviamo ora cosa succede per $x = 1$ e per $x = -1$.

Per $x = 1$ la serie diventa:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1^k}{k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$$

che converge per il criterio di Leibnitz, infatti è una serie a termini alterni e il termine k -esimo $a_k = \frac{1}{k}$ è decrescente. Per $x = -1$ la serie diventa:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{2k+1} \frac{1}{k} = \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{1}{k} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k}$$

che è la serie armonica e quindi non converge.

Concludendo la serie converge per $x \in (-1, 1]$

di dire se le seguenti serie convergono e in caso affermativo calcolarne il valore:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k \cdot 2^k}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{2^k}{k}.$$

Svolgimento

Si può osservare che le due serie si ottengono dalla serie studiata precedentemente:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$$

La prima serie è:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k \cdot 2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Si ottiene dalla serie studiata per $x = \frac{1}{2}$, tale valore appartiene all'intervallo di convergenza della serie, dunque la serie data converge e in particolare si ha:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

La seconda serie è:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{2^k}{k}$$

Si ottiene dalla serie studiata per $x = 2$, tale valore non appartiene all'intervallo di convergenza della serie, dunque la serie data non converge.