

UNIVERSITA' DELLA CALABRIA
FACOLTA' DI INGEGNERIA

– Seconda prova scritta di CALCOLO 3 –

CORRETTORE DEL 19/07/05

COGNOME

NOME

MATRICOLA O DATA DI NASCITA

IMPORTANTE

Il presente fascicolo contiene gli esercizi.

**I risultati e lo svolgimento relativo vanno riportati negli appositi spazi:
un campo vuoto significa zero punti.**

Nei grafici è fondamentale il posizionamento dei vari elementi mentre sono irrilevanti i fattori di scala.

Gli esercizi valgono 25 punti il primo, 25 punti il secondo, 18 punti il terzo, 7 punti il quarto e 5 punti il quinto.

SPAZIO RISERVATO ALLA COMMISSIONE

--	--	--	--	--	--	--

A

Esercizio 1 – Siano

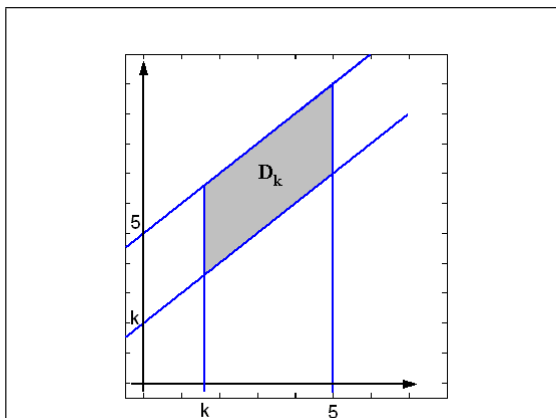
$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt[3]{27x(y-x)^2}}.$$

e per ogni $0 < k < 5$

$$D_k = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : k \leq x \leq 5, k \leq y - x \leq 5\}.$$

Si chiede

Una rappresentazione grafica di D_k ;



un cambiamento di variabili che consenta il calcolo dell'integrale di $f(x, y)$ su D_k ;

Svolgimento

$$\begin{cases} v = y - x & k \leq v \leq 5 \\ u = x & k \leq u \leq 5 \end{cases}$$

Nelle nuove coordinate si ha:

$$D'_k = \{(u, v) \in \mathbf{R}^2 : k \leq u \leq 5, k \leq v \leq 5\}.$$

$$\left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \frac{1}{\left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right|} = 1$$

il valore dell'integrale di $f(x, y)$ esteso a D_k .

Svolgimento

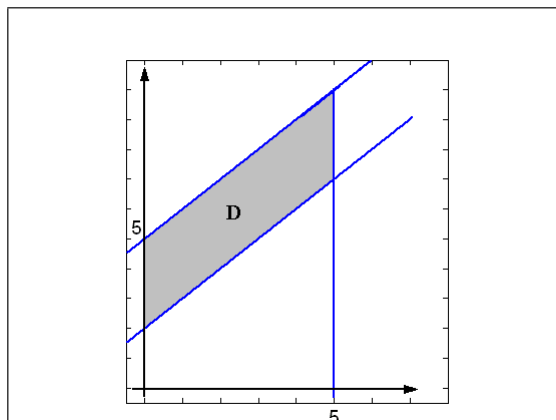
$$\begin{aligned} \iint_{D_k} \frac{1}{\sqrt[3]{27x(y-x)^2}} dx dy &= \iint_{D'_k} \frac{1}{\sqrt[3]{27u v^2}} du dv = \int_k^5 du \int_k^5 \frac{1}{3\sqrt[3]{u} \sqrt[3]{v^2}} dv = \\ &= \int_k^5 \frac{1}{3\sqrt[3]{u}} [3\sqrt[3]{v}]_k^5 du = \left[\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{k} \right] \int_k^5 \frac{1}{\sqrt[3]{u}} du = \left[\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{k} \right] \frac{3}{2} \left[\sqrt[3]{u^2} \right]_k^5 = \\ &= \frac{3}{2} \left(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{k} \right) \left(\sqrt[3]{5^2} - \sqrt[3]{k^2} \right) \end{aligned}$$

Sia

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x \leq 5, 0 \leq y - x \leq 5\},$$

si chiede:

Una rappresentazione grafica di D ;



il valore dell'integrale di $f(x, y)$ esteso a D .

Svolgimento

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{1}{\sqrt[3]{27x(y-x)^2}} dx dy &= \lim_{k \rightarrow 0} \iint_{D'_k} \frac{1}{\sqrt[3]{27u v^2}} du dv = \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{3}{2} \left(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{k} \right) \left(\sqrt[3]{5^2} - \sqrt[3]{k^2} \right) = \frac{3}{2} \left(\sqrt[3]{5} \right) \left(\sqrt[3]{5^2} \right) = \frac{3}{2} \cdot 5 = \frac{15}{2} \end{aligned}$$

Sia D definito come sopra e, per $a > 2$, sia $\Omega_a \subset \mathbf{R}^2$ il seguente insieme:

$$\Omega_a := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \geq 0, 4 \leq x^2 + y^2 \leq a^2\}.$$

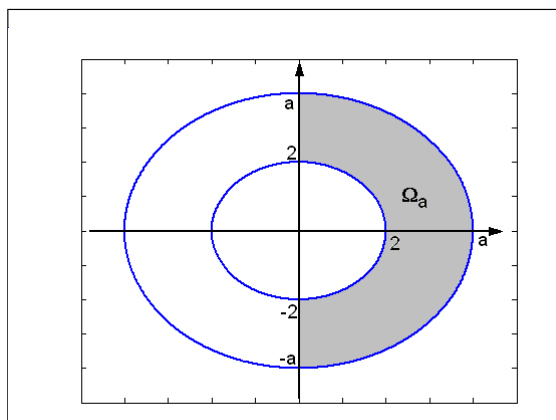
Determinare a in modo tale che l'area di Ω_a sia uguale all'area di D .

Svolgimento

Una rappresentazione grafica di Ω_a è mostrata in figura.

L'area di Ω_a si può calcolare la metà dell'area della corona circolare di raggi 2 ed a .

$$Area(\Omega_a) = \frac{\pi a^2 - \pi 4}{2} = \frac{\pi}{2}(a^2 - 4).$$



L'area di D la si ottiene calcolando

$$Area(D) = \iint_D dx dy = \int_0^5 du \int_0^5 dv = 25$$

$$Area(\Omega_a) = Area(D) \quad \text{se} \quad \frac{\pi}{2}(a^2 - 4) = 25 \quad \text{da cui} \quad a = \pm \sqrt{\frac{50}{\pi} + 4}$$

Da cui segue che $a = \sqrt{\frac{50}{\pi} + 4}$

Esercizio 2 – Sia

$$\omega(x, y) = (\log(2xy) + 1 + 2y) dx + \left(\frac{x}{y} + 2x\right) dy .$$

si chiede:

indicato con D il dominio di definizione di ω , qual è D e disegnarlo.

Svolgimento

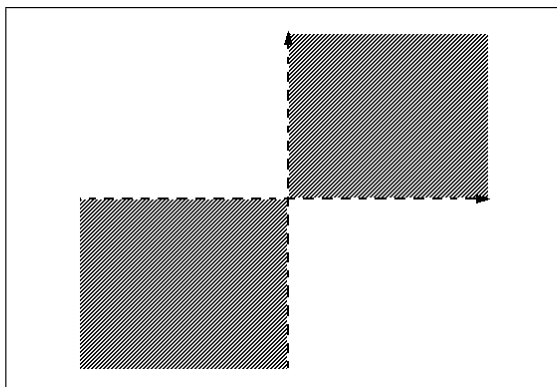
La forma differenziale è definita in

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2xy > 0\}$$

ovvero

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0, y < 0\}.$$

Una rappresentazione grafica di D è rappresentata in figura.



se ω è chiusa in D ; Motivare la risposta

Svolgimento

Per verificare se $\omega(x, y)$ è chiusa bisogna calcolare le derivate miste e confrontare se sono uguali.

$$\frac{\partial \left(\frac{x}{y} + 2x\right)}{\partial x} = \frac{1}{y} + 2$$

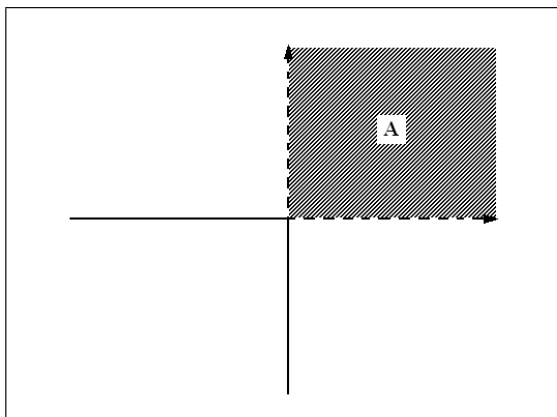
$$\frac{\partial (\log(2xy) + 1 + 2y)}{\partial y} = \frac{2x}{2xy} + 2 = \frac{1}{y} + 2$$

se ω è esatta in $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$; Motivare la risposta

Svolgimento

Sì, ω è esatta in A , poichè ω è chiusa in A ed A è un insieme semplicemente connesso.

In figura viene mostrata una rappresentazione grafica di A .



una primitiva di ω in A ;

Svolgimento

I MODO

Sappiamo che, per definizione di forma esatta, esiste una funzione $\phi(x, y)$ tale che:

$$\frac{\partial(\phi(x, y))}{\partial x} = \log(2xy) + 1 + 2y$$

e che

$$\frac{\partial(\phi(x, y))}{\partial y} = \frac{x}{y} + 2x$$

Per cui calcoliamo la primitiva integrando $\frac{\partial(\phi(x, y))}{\partial x} = \log(2xy) + 1 + 2y$ rispetto a x

$$\begin{aligned}\phi(x, y) &= \int (\log(2xy) + 1 + 2y)dx = \int \log(2xy)dx + \int dx + \int 2ydx = \\ &= \frac{1}{2y} [2xy \log(2xy) - 2xy] + x + 2yx + g(y) = x \log(2xy) + 2xy + g(y)\end{aligned}$$

Ora deriviamo parzialmente rispetto a y la funzione trovata:

$$\frac{\partial(\phi(x, y))}{\partial y} = \frac{2x^2}{2xy} + 2x + g'(y) = \frac{1}{y} + 2x + g'(y)$$

Dalla seconda uguaglianza $\frac{\partial(\phi(x, y))}{\partial y} = \frac{x}{y} + 2x$ si ha:

$$\frac{x}{y} + 2x + g'(y) = \frac{x}{y} + 2x$$

Da cui $g'(y) = 0$ ovvero $g(y) = c$ dove c è una costante, $c \in \mathbb{R}$. Da cui possiamo concludere che UNA primitiva di ω è:

$$\phi(x, y) = x \log(2xy) + 2xy$$

II MODO

Calcoliamo la primitiva utilizzando l'integrazione della forma differenziale lungo una curva γ . Se la forma differenziale è esatta

$$\int_{\gamma} \omega ds = \phi(x, y) - \phi(1, 1)$$

da cui una primitiva può essere calcolata nel seguente modo:

$$\phi(x, y) = \int_{\gamma} \omega ds$$

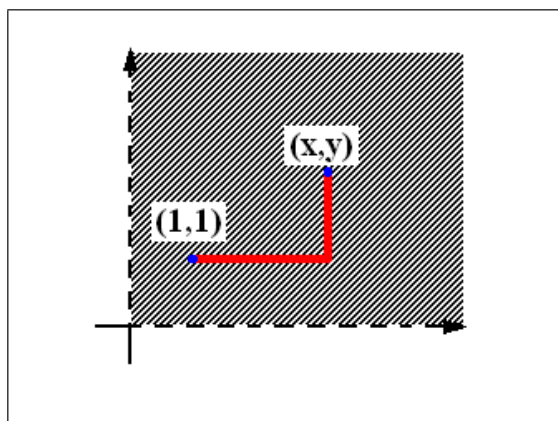
Calcoliamo l'integrale lungo γ (rappresentata in figura) considerando γ come l'unione di due curve $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ dove:

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 1 \end{cases} \quad t \in [1, x]$$

e

$$\gamma_2 : \begin{cases} x = x \\ y = t \end{cases} \quad t \in [1, y]$$

sostituendo si ha:



$$\begin{aligned}
\phi(x, y) &= \int_{\gamma_1} \omega ds + \int_{\gamma_2} \omega ds = \int_1^x (\log(2t) + 1 + 2) dt + \int_1^y \left(\frac{x}{t} + 2x \right) dt = \\
&= [t \log(2t) + 2t] \Big|_1^x + [x \log(t) + 2xt] \Big|_1^y = \\
&= x \log(2x) + 2x - \log(2) - 2 + x \log(y) + 2xy - x \log(1) - 2x = \\
&= x \log(2x) + x \log(y) + 2xy - \log(2) - 3 = \\
&= x \log(2xy) + 2xy - \log(2) - 3
\end{aligned}$$

Dunque una primitiva è

$$\phi(x, y) = x \log(2xy) + 2xy$$

Indicata con $\tilde{\omega}$ la seguente forma differenziale:

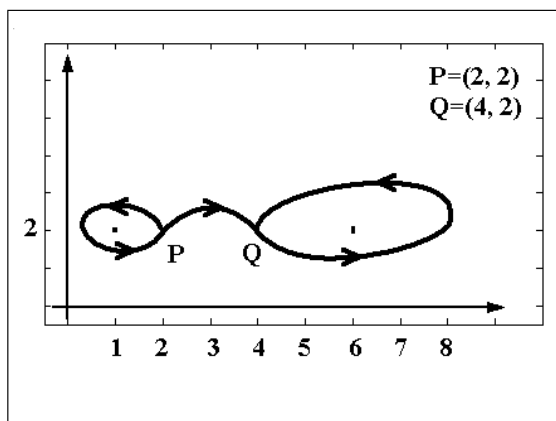
$$\tilde{\omega}(x, y) = \left(\log(2xy) + 1 + 2y - \frac{y-2}{(x-1)^2 + (y-2)^2} \right) dx + \left(\frac{x}{y} + 2x + \frac{x-1}{(x-1)^2 + (y-2)^2} \right) dy$$

calcolare l'integrale di $\tilde{\omega}$ lungo il cammino dato dalla curva C disegnata in figura (orientata, come indicato in figura, in modo da percorrerla da P a Q).

Per calcolare l'integrale posso scrivere

$$\tilde{\omega}(x, y) = \omega(x, y) + \omega_1(x, y)$$

dove:



$$\omega(x, y) = (\log(2xy) + 1 + 2y) dx + \left(\frac{x}{y} + 2x \right) dy$$

e

$$\omega_1(x, y) = \left(-\frac{y-2}{(x-1)^2 + (y-2)^2} \right) dx + \left(\frac{x-1}{(x-1)^2 + (y-2)^2} \right) dy$$

Possiamo osservare che ω è esatta in A , dominio in cui è contenuto la curva, dunque l'integrale non dipende dal percorso ma solo dal punto iniziale e dal punto finale.

$$\begin{aligned}
\int_C \omega ds &= \phi(4, 2) - \phi(2, 2) = 4 \cdot \log(2 \cdot 4 \cdot 2) + 2 \cdot 4 \cdot 2 - 2 \cdot \log(2 \cdot 2 \cdot 2) - 2 \cdot 2 \cdot 2 = \\
&= 4 \cdot \log(16) + 16 - 2 \cdot \log(8) - 8 = \log(16^4) - \log(8^2) + 8 = \\
&= \log(16^3) + 8 = \log(2^{4^3}) + 8 = \log(2^{12}) + 8 = 12 \log(2) + 8
\end{aligned}$$

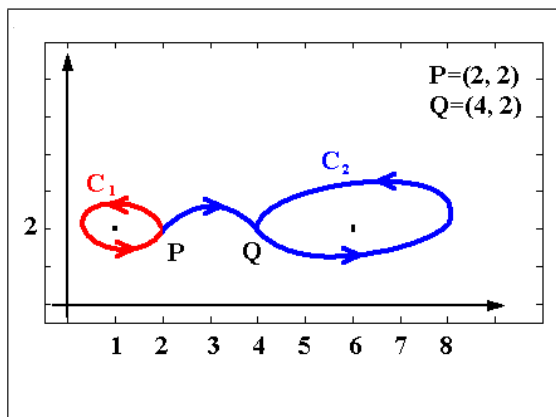
Passiamo ora a calcolare l'integrale di ω_1 .

$$\int_C \omega_1 ds = \int_{C_1} \omega_1 ds + \int_{C_2} \omega_1 ds$$

dove C_1 e C_2 sono rappresentate in figura.

Osserviamo che

$$\int_{C_1} \omega_1 ds = 2\pi$$

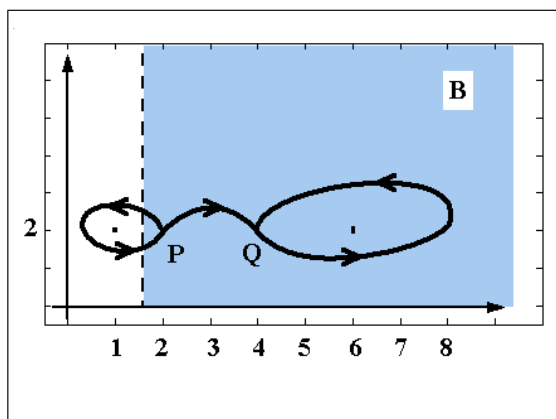


essendo ω_1 la forma nota non definita in $(1,2)$, e C_1 una curva chiusa percorsa una volta sola in senso antiorario e contenente al suo interno il punto $(1,2)$.

Per calcolare

$$\int_{C_2} \omega_1 ds$$

osserviamo che la forma non è esatta in A , ma è esatta in un sottoinsieme B (in figura) di A , che non contiene il punto $(1,2)$, dunque $\int_{C_2} \omega_1 ds$ non dipende dal percorso ma solo dal punto finale e dal punto iniziale.



Una primitiva di ω_1 è $\phi_1(x, y) = \arctan\left(\frac{y-2}{x-1}\right)$ che è definita per $x \neq 1$.

Dunque

$$\int_{C_2} \omega_1 ds = \phi_1(4, 2) - \phi_1(2, 2) = \arctan\left(\frac{2-2}{4-1}\right) - \arctan\left(\frac{2-2}{2-1}\right) = 0$$

Concludendo

$$\int_C \tilde{\omega}(x, y) ds = \int_C \omega(x, y) ds + \int_C \omega_1(x, y) ds = 12 \log(2) + 8 + 2\pi$$

Esercizio 3 – Trovare la soluzione della seguente equazione differenziale:

$$e^{2y-x} y' - 2x = 0$$

con condizione iniziale

$$y(1) = 2.$$

Svolgimento

Risolviamo l'equazione con il metodo della separazione delle variabili.

$$e^{2y-x} y' - 2x = 0 \longrightarrow e^{2y} e^{-x} y' - 2x = 0 \longrightarrow \frac{e^{2y}}{e^x} y' - 2x = 0 \longrightarrow e^{2y} y' = 2x e^x$$

$$e^{2y} \frac{dy}{dx} = 2x e^x \longrightarrow e^{2y} dy = 2x e^x dx$$

Integrando primo e secondo membro si ottiene:

$$\frac{1}{2} e^{2y} = 2(x e^x - e^x) + c \longrightarrow e^{2y} = 4 e^x (x - 1) + c$$

$$\ln e^{2y} = \ln (4 e^x (x - 1) + c) \longrightarrow 2y = \ln (4 e^x (x - 1) + c)$$

La soluzione dell'equazione differenziale è:

$$y(x) = \frac{1}{2} \ln (4 e^x (x - 1) + c)$$

Ora risolviamo il problema di Cauchy. Determiniamo la costante imponendo la condizione iniziale $y(1) = 2$.

$$y(1) = \frac{1}{2} \ln (4 e^1 (1 - 1) + c) = 2$$

$$\frac{1}{2} \ln (c) = 2 \longrightarrow \ln (c) = 4$$

$$e^{\ln (c)} = e^4 \longrightarrow c = e^4$$

Da cui segue che la soluzione del problema di Cauchy è:

$$y(x) = \frac{1}{2} \ln (4 e^x (x - 1) + e^4)$$

Dire, motivando la risposta, se la soluzione é anche soluzione “globale” (cioé soluzione “in grande”).

Svolgimento

Per rispondere a questa domanda dobbiamo osservare i domini di definizione della funzione che compare nell'equazione differenziale $y' = f(x, y)$ e il dominio della soluzione del problema di Cauchy $y(x)$

Riscriviamo l'equazione differenziale isolando la derivata al primo membro:

$$e^{2y-x} y' - 2x = 0 \longrightarrow y' = 2x e^{-2y+x}$$

La funzione $f(x, y)$ che compare nell'equazione differenziale è $f(x, y) = 2x e^{-2y+x}$ che è definita per ogni valore di x .

La soluzione del problema di Cauchy è $y(x) = \frac{1}{2} \ln(4e^x(x-1) + e^4)$ quindi si deve studiare quando

$$(4e^x(x-1) + e^4) > 0$$

Osserviamo che:

$$(4e^x(x-1) + e^4) > 4e^x(x-1)$$

Consideriamo la funzione $g(x) = 4e^x(x-1)$.

Calcoliamo i limiti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

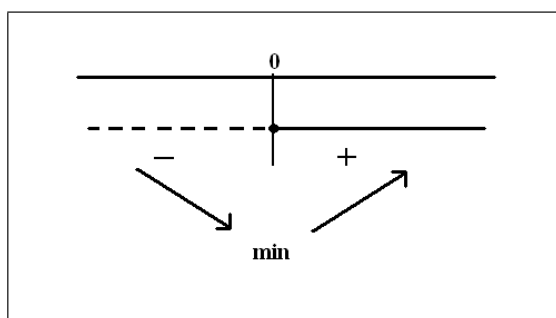
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$$

Dallo studio della derivata prima abbiamo:

$$g'(x) = 4e^x(x-1+1) \geq 0$$

$$e^x x \geq 0 \iff x \geq 0$$

Osserviamo che assume un valore minimo in $x = 0$.



Il valore di $g(x)$ in $x = 0$ è $g(0) = -4$ in altre parole -4 è il valore minimo della funzione $g(x)$.

Allora, possiamo concludere che:

$$4e^x(x-1) \geq -4 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{ma } 4 < e^4 \longrightarrow -4 > -e^4 \text{ da cui } 4e^x(x-1) \geq -4 > -e^4$$

Pertanto

$$4e^x(x-1) > -e^4 \quad \forall x \in \mathbb{R} \iff 4e^x(x-1) + e^4 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Quindi, possiamo concludere che $y(x)$ è una funzione definita per ogni valore di x .

Dato che il dominio della soluzione coincide con il dominio della funzione $f(x, y)$ relativo alla variabile x , allora la soluzione è in grande.

Esercizio 4 – Data l'equazione differenziale

$$y' = e^{x^2}(1 - y^2)$$

con condizione iniziale $y(0) = 0$.

si chiede

di dire se la soluzione é limitata; Motivare la risposta

Svolgimento

Osserviamo che, la funzione $f(x, y) = e^{x^2}(1 - y^2)$ e $\frac{\partial(f(x, y))}{\partial y} = e^{x^2}(-2y)$ sono continue in \mathbb{R}^2 .

Pertanto, essendo verificate le ipotesi del TEOREMA DI CAUCHY, esiste una e una sola soluzione al problema di Cauchy assegnato, che indicheremo con $\bar{y}(x)$.

Si può inoltre notare che esiste una e una sola soluzione ad ogni problema:

$$\begin{cases} y' = e^{x^2}(1 - y^2) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$$

Osserviamo inoltre che $y' = 0$ quando $e^{x^2}(1 - y^2) = 0 \rightarrow (1 - y^2) = 0 \rightarrow y(x) = \pm 1$. Ma $y(x) = \pm 1$ sono soluzioni dell'equazione differenziale

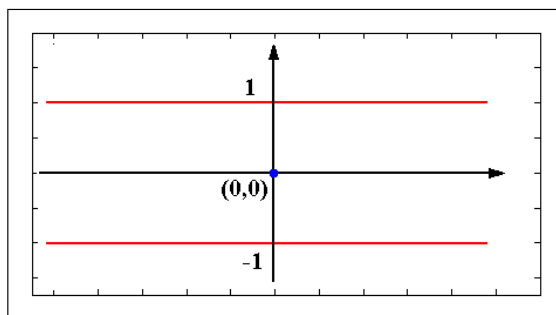
In particolare consideriamo i due problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^{x^2}(1 - y^2) \\ y(x_0) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y' = e^{x^2}(1 - y^2) \\ y(x_0) = -1 \end{cases}$$

hanno un'unica soluzione relativamente $y(x) = 1$ e $y(x) = -1$ per ogni x_0 assegnato.

Nessuna altra soluzione può esistere per i punti $(x_0, 1)$ e $(x_0, -1)$.

Dunque la soluzione $\bar{y}(x)$, che deve passare per il punto $(0, 0)$, deve essere limitata dalle due soluzioni $y(x) = \pm 1$ ovvero $-1 < \bar{y}(x) < 1$



quindi la soluzione è limitata.

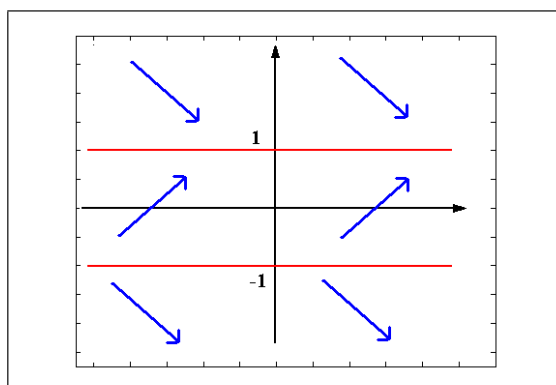
di studiare la monotonia della soluzione

Svolgimento

Per studiare la monotonia dobbiamo studiare:

$$y' > 0 \rightarrow e^{x^2}(1 - y^2) > 0 \rightarrow \begin{matrix} e^{x^2} > 0 & \text{sempre} \\ (1 - y^2) > 0 & \text{se } -1 < y < 1 \end{matrix}$$

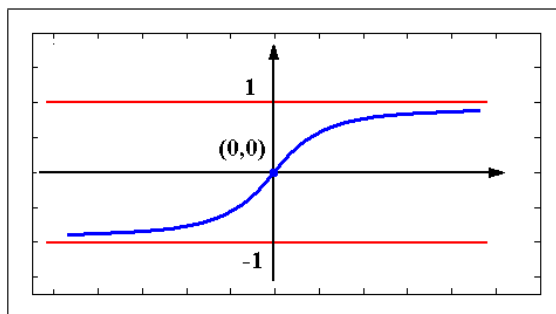
Per cui la soluzione è crescente per $-1 < y(x) < 1$ e decrescente per $y(x) < -1$ e $y(x) > 1$. Dunque la soluzione $\bar{y}(x)$ è sempre crescente



di disegnare il grafico della soluzione*Svolgimento*

Non conosciamo dove la soluzione $\bar{y}(x)$ cambia concavità ma sappiamo che è limitata $-1 < \bar{y}(x) < 1$.

Possiamo anche osservare che $y = \pm 1$ sono due asintoti orizzontali, quindi un grafico della soluzione potrebbe essere quello rappresentato in figura.

**di dire se la soluzione é una soluzione “globale” (cioé “in grande”)***Svolgimento*

Per rispondere a questa domanda dobbiamo osservare i domini di definizione della funzione che compare nell'equazione differenziale $y' = f(x, y)$ e il dominio della soluzione del problema di Cauchy $\bar{y}(x)$

La funzione $f(x, y)$ che compare nell'equazione differenziale è $f(x, y) = e^{x^2}(1 - y^2)$ che è definita per ogni valore di x .

La soluzione del problema di Cauchy è $\bar{y}(x)$ esiste per ogni valore di x .

Dato che il dominio della soluzione coincide con il dominio della funzione $f(x, y)$ relativo alla variabile x , allora la soluzione è in “globale” (cioé “in grande”).

Esercizio 5 –**Calcolare, usando gli sviluppi di Taylor, il seguente limite:**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(3x) \cdot \sin(6x)}{1 - \cos x}.$$

Svolgimento

Scriviamo lo sviluppo in serie di Taylor delle funzioni che compaiono nel limite:

$$\arctan(3x) = 3x + o(x^2)$$

$$\sin(6x) = 6x + o(x^2)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

Sostituendo nel limite avrò:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3x + o(x^2)) \cdot (6x + o(x^2))}{\frac{x^2}{2} + o(x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{18 x^2}{\frac{x^2}{2}} = 36.$$