Volevo chiedere una cosa di geometria proiettiva riguardo la risoluzione di un particolare tipo di problema.

In $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, si tratterebbe di determinare le equazioni cartesiane della retta s contenente P e incidente sia r che r', dove:

- $r : X_0 - X_2 + 2X_3 = 0, \quad 2X_0 + X_1 = 0;$
- $r' : 2X_1 - 3X_2 + X_3 = 0, \quad X_0 + X_3 = 0;$
- $P = [0 : 1 : 0 : 1]$

Un metodo canonico per risolverlo è il seguente:

Consideriamo il piano individuato da r e P. Esso si può scrivere come piano passante per tre punti: P, e due qualsiasi di r. Dalle equazioni di r si determina immediatamente che $[1 : -2 : 1 : 0]$ e $[1 : -2 : 3 : 1]$ sono due punti distinti di r. Il piano individuato ha dunque equazione:

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} x_0 - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} x_2 - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} x_3$$

$= -3x_0 - 2x_1 + x_2 + 2x_3$; sia esso σ.
Calcoliamo ora l'intersezione tra σ e r':

$$\begin{cases} -3x_0 - 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_0 + x_3 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_1 = -4 \\ x_2 = -3 \\ x_3 = -1 \end{cases} \longrightarrow [1 : -4 : -3 : -1]$$

Ricaviamo ora, in forma parametrica, la retta passante per P e Q. Usando la formula generale, per $P = [p_0 : p_1 : p_2 : p_3]$, $Q = [q_0 : q_1 : q_2 : q_3]$:

$$\begin{cases} x_0 = p_0 \cdot \lambda + (q_0 - p_0) \cdot u \\ x_1 = p_1 \cdot \lambda + (q_1 - p_1) \cdot u \\ x_2 = p_2 \cdot \lambda + (q_2 - p_2) \cdot u \\ x_3 = p_3 \cdot \lambda + (q_3 - p_3) \cdot u \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_0 = u \\ x_1 = \lambda - 5u \\ x_2 = -3u \\ x_3 = \lambda - 2u \end{cases}$$

Per $u = 0$ si ottiene P, per $u \neq 0$ si può porre $u = 1$ senza perdita di generalità ottenendo $[1 : \lambda - 5 : -3 : \lambda - 2]$, che al variare di λ restituisce i punti (al finito) di una retta parametrizzabile da λ stesso. $\square$

Un'ulteriore risoluzione può essere fornita nel seguente modo:

Consideriamo ancora il piano individuato da r e da P: abbiamo già visto che esso ha equazione $-3x_0 - 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$; questa volta però consideriamo anche il piano individuato da r' e da P, dove, dalle equazioni di r', si determina immediatamente che $[0 : -3 : 2 : 0]$ e $[-1 : 4 : 3 : 1]$ sono due punti distinti di r'. Il piano individuato ha dunque equazione:

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = x_0 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3x_0 + x_1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$= 3x_0 - 2x_1 + 3x_2 + 2x_3$.

Le equazioni della retta sono perciò:

$$\begin{cases} -3x_0 - 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_0 - 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} -3x_0 - 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

che in forma affine e parametrica diventano:

$$\begin{cases} -2x + y + 2z = 3 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x - z = -3 \\ y = -3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -3 \\ z = 3 + t \end{cases}$$

che rappresenta effettivamente la stessa retta ottenuta con il procedimento precedente, ponendo $t = \lambda - 5$. $\square$

Tuttavia, ho pensato ad altre due risoluzioni meno standard, che però non portano al risultato ottenuto con i due procedimenti cui sopra.
La prima, partendo dall'ipotesi che i punti di incidenza siano al finito, scrive la generica retta per P in forma affine, cartesiana e parametrica, tenendo conto che il fatto che il punto all'infinito sia $[0 : 1 : 0 : 1]$ è equivalente a dire che i parametri direttori sono $(1, 0, 1)$, per cui la retta può essere scritta come:

$$\begin{cases} x = t + c_1 \\ y = c_2 \\ z = t \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} x = z + c_1 \\ y = c_2 \end{cases}$$

Trasformiamo ora in forma affine anche le equazioni di r e r':

$$r : \begin{cases} 1 - y + 2z = 0 \\ 2 + x = 0 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 + 2u \\ z = u \end{cases}$$

$$r' : \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 1 + z = 0 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} x = v \\ y = (1/3)(2v - 1) \\ z = -1 \end{cases}$$

Troviamo ora le condizioni su c_1 e c_2 affinché ci sia incidenza con r, r':

- deve esistere una coppia (t, u) tale che $(t + c1, c2, t) = (-2, 1 + 2u, u)$;
- deve esistere una coppia (t, v) tale che:
  $(t + c1, c2, t) = (v, (1/3)(2v - 1), -1)$;

Dalla prima risulta $c_1 = -2 - u, c_2 = 1 + 2u$; dalla seconda $c_1 = 1 + v$, $c_2 = (1/3)(2v-1)$. In particolare questo implica che u, v soddisfino il sistema:

$$\begin{cases} -2 - u = 1 + v \\ 1 + 2u = (1/3)(2v - 1) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u = -5/4 \\ v = -7/4 \end{cases}$$

dunque $c_1 = -3/4, c_2 = -3/2$, e la retta ha equazioni:

$$\begin{cases} x = z - 3/4 \\ y = -3/2 \end{cases}$$

che risulta differente da quella trovata in precedenza. $\square$

La seconda, supponendo ancora che i punti di incidenza siano al finito, utilizza la forma omogenea:

$$\begin{cases} x = z + c_1 \\ y = c_2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 + c_1 x_0 \\ x_2 = c_2 x_0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} c_1 x_0 - x_1 + x_3 = 0 \\ c_2 x_0 - x_2 = 0 \end{cases}$$

A questo punto si mette a sistema la retta prima con r e dopo con r', richiedendo in entrambi i casi che il determinante sia zero, dal momento che l'intersezione deve essere non vuota:

$$0 = \begin{vmatrix} c_1 & -1 & 0 & 1 \\ c_2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} c_1 & 0 & 1 \\ c_2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} c_2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$= -4 - 2c_1 + 1 - c_2 = -2c_1 - c_2 - 3 = 0$

$$0 = \begin{vmatrix} c_1 & -1 & 0 & 1 \\ c_2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} c_1 & -1 & 0 \\ c_2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} c_1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$= -3 - 3c_2 + 2c_1 = 0$ da cui mettendo a sistema ancora $c_1 = -3/4, c_2 = -3/2$, e si ottiene la retta ottenuta prima, diversa da quella ottenuta con i primi due metodi. $\square$

Considerato che i risultati corretti sono quelli che si ottengono con i primi metodi, come mai con gli altri due si hanno risultati differenti?