

Algebra – Problemi di ammissione

A1. Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$f(f(x - y)) = f(x)f(y) - f(x) + f(y) - xy$$

per ogni coppia di numeri reali x e y .

A2. Dimostrare che

$$\frac{1 + a^2}{1 + b + c^2} + \frac{1 + b^2}{1 + c + a^2} + \frac{1 + c^2}{1 + a + b^2} \geq 2$$

per ogni terna (a, b, c) di numeri reali maggiori di -1 .

A3. Sia $n \geq 2$ un numero intero, e siano $x_1, \dots, x_n$ numeri reali positivi tali che

$$(x_1 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \leq \left(n + \frac{1}{2} \right)^2.$$

Dimostrare che

$$\max \{x_1, \dots, x_n\} \leq 4 \min \{x_1, \dots, x_n\}.$$

Combinatoria – Problemi di ammissione

- C1. Siano dati k punti distinti su una circonferenza. Chiamiamo *intervallo* un qualunque arco che abbia come estremi due di tali punti. Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di intervalli con la proprietà che ogni membro della famiglia è *contenuto* come “sottointervallo” in al più un altro membro della famiglia. Sia M il numero dei membri *massimali* di $\mathcal{F}$, cioè quelli che non sono sottointervalli di nessun altro membro di $\mathcal{F}$, e sia N il numero dei membri di $\mathcal{F}$ che non sono massimali.

Dimostrare che

$$M + \frac{N}{2} \leq k.$$

- C2. Sul tavolo circolare del Consiglio dei Ministri sono stati disposti 28 vasi. Due persone sedute intorno al tavolo si possono vedere se e solo se la corda che li congiunge non contiene alcun vaso.

Dimostrare che, comunque si facciano sedere 12 ministri intorno al tavolo, ce ne saranno sempre 2 che si possono vedere.

- C3. Ad un tavolo circolare (tanto per cambiare) siedono $2n$ persone. Vengono distribuiti m biscotti e le persone possono passarseli a due condizioni:

- si può passare un biscotto solo ad un vicino,
- per passare un biscotto bisogna mangiarne uno.

Determinare il minimo valore di m per cui vale la seguente proprietà: qualunque sia la distribuzione iniziale dei biscotti, e comunque si scelga una persona A , esiste una successione di mosse che porta A ad avere almeno un biscotto.

Geometria – Problemi di ammissione

- G1. Sia D il piede della bisettrice dell'angolo $\angle A$ nel triangolo $\triangle ABC$. La retta che congiunge gli incentri dei triangoli $\triangle ABD$ e $\triangle ACD$ incontra nuovamente AB e AC nei punti M ed N , rispettivamente.

Dimostrare che BN e CM si incontrano sulla bisettrice AD .

- G2. Sia AC un diametro di una circonferenza, e sia BD una corda della stessa circonferenza perpendicolare ad AC . Sia E l'intersezione tra AC e BD , e supponiamo che E sia più vicino ad A che a C . Sia F un punto sul prolungamento di AD dalla parte di A , e sia G un punto sul prolungamento di AB dalla parte di A , tali che DG è parallelo a BF . Sia H il piede della perpendicolare condotta da C alla retta FG .

Dimostrare che i punti B, E, F, H giacciono su un'unica circonferenza.

- G3. Sia P un punto interno al triangolo acutangolo $\triangle ABC$. I cerchi con centro nei punti medi dei lati e passanti per P si intersecano nuovamente a coppie nei punti D, E , ed F .

Dimostrare che P è l'incentro del triangolo $\triangle DEF$ se e solo se P è il circocentro del triangolo $\triangle ABC$.

Teoria dei numeri – Problemi di ammissione

N1. Determinare tutte le terne (a, b, c) di numeri interi tali che

$$2^a + 3^b = 5^c.$$

N2. Determinare tutti gli interi positivi k per cui esiste un intero positivo M che soddisfa le seguenti due proprietà:

- M è multiplo di k ;
- dividendo M per $2, 3, \dots, 2012$ si ottengono resti $r_2, r_3, \dots, r_{2012}$ tutti distinti.

N3. Determinare tutte le quintuple (a, n, p, q, r) di interi positivi che soddisfano l'equazione

$$a^n - 1 = (a^p - 1)(a^q - 1)(a^r - 1).$$