

## Teoria dei Numeri - Problemi di ammissione

1. Sia  $n$  un intero maggiore di 1 avente esattamente  $k$  divisori primi distinti. Mostrare che esiste un intero  $a$  con  $1 < a < \frac{n}{k} + 1$  tale che  $n \mid a^2 - a$ .
2. Sia  $p$  un primo congruo a 2 modulo 3 e sia  $\pi(x) = x^3$  considerata come permutazione di  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ . Dimostrare che  $\pi$  è una permutazione pari se e solo se  $p \equiv 3 \pmod{4}$ .
3. Sia  $\tau(n)$  il numero di divisori di  $n$ . Diciamo che un intero positivo  $n$  è *buono* se per ogni intero positivo  $m < n$  si ha  $\tau(m) < \tau(n)$ . Dimostrare che per ogni  $k$  intero positivo esistono al più una quantità finita di numeri buoni non divisibili per  $k$ .