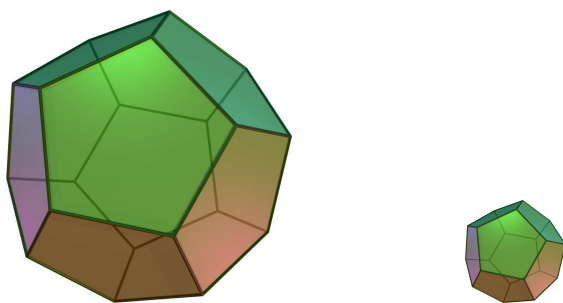


INdAM

QUESTIONARIO

- (1) Lanciando tre dadi, qual è la probabilità che il prodotto dei numeri ottenuti sia multiplo di 3?
- (A) 1
(B) $5/9$
(C) $2/3$
(D) $19/27$
(E) $91/216$
- (2) In una pagina di un vecchio manoscritto matematico il testo si è rovinato e non è più leggibile. Si riesce a capire che, se due numeri positivi x e y soddisfano una certa proprietà, allora solo una delle affermazioni seguenti è vera. Quale?
- (A) $x > y$
(B) $x > 2y$
(C) $x > y^2$
(D) $x^2 > y^2$
(E) $x^2 > 2y^2$
- (3) Quanti sono gli interi positivi n di due cifre tali che $10n$ è uguale ad 11 volte la somma dei quadrati delle due cifre di n ?
- (A) nessuno
(B) 1
(C) 2
(D) 4
(E) 11
- (4) Un triangolo rettangolo ha i cateti che misurano 30 e 40. Tracciando dal vertice dell'angolo retto l'altezza, la mediana e la bisettrice, l'ipotenusa viene divisa in quattro segmenti. Qual è la misura del più corto tra essi?
- (A) $24/7$
(B) $15/4$
(C) $16/5$
(D) $25/6$
(E) $25/8$
- (5) Paola vuole riempire una tabella 4×4 scrivendo in ogni casella il numero 0 oppure 1, in maniera che su nessuna riga e su nessuna colonna la somma superi 1. In quanti modi Paola può riempire la tabella?
- (A) 65
(B) 69
(C) 93
(D) 196
(E) 209

- (6) Due dodecaedri regolari hanno volume V' e V'' e superficie totale di area, rispettivamente, A' e A'' .



Sappiamo che $A'/A'' = 8$ e che V'' vale $\sqrt{10}$. Qual è il valore di V' ?

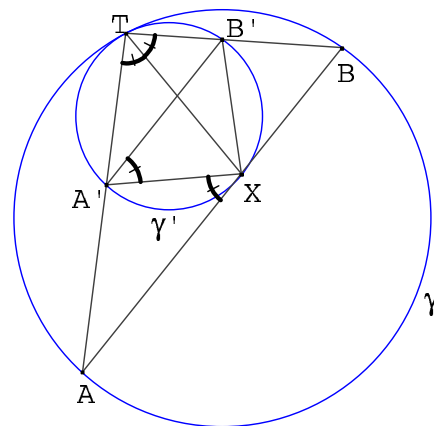
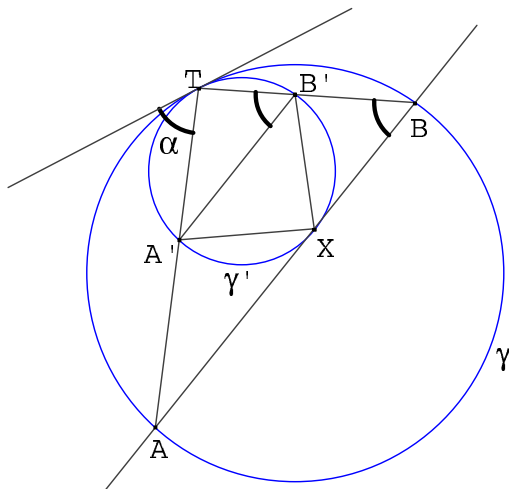
- (A) $4\sqrt{5}$
 (B) $8\sqrt{10}$
 (C) $32\sqrt{5}$
 (D) $20\sqrt{2}$
 (E) $64\sqrt{10}$
- (7) I numeri x_1, x_2, \dots, x_k sono diversi tra loro, e tutti inversi di numeri naturali: sono cioè della forma $1/n$. Sapendo che le differenze tra termini consecutivi sono tutte uguali, cioè che $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3 = \dots$, possiamo affermare che il numero k
- (A) è al massimo 2
 (B) è al massimo 3
 (C) è al massimo 4
 (D) è al massimo 12
 (E) può essere arbitrariamente grande
- (8) La successione di interi a_n è costruita in questo modo: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, e, per $n > 1$, a_n si ottiene sottraendo da a_{n-1} la somma di tutti i termini precedenti: $a_n = a_{n-1} - (a_0 + \dots + a_{n-2})$. Ad esempio, $a_2 = a_1 - a_0$, $a_3 = a_2 - (a_0 + a_1)$, $a_4 = a_3 - (a_0 + a_1 + a_2)$, e così via. Qual è il valore di a_{2007} ?
- (A) -4^{669}
 (B) -2^{1002}
 (C) 0
 (D) 2^{1003}
 (E) 4^{502}
- (9) In un cerchio di raggio 1, le corde AC e BD si intersecano ortogonalmente in un punto interno al cerchio, diverso dal suo centro. Al variare delle possibili scelte dei punti A, B, C, D , la somma $\overline{AC} + \overline{BD}$ delle lunghezze delle corde assume tutti e soli i valori compresi tra
- (A) 2 e $3\sqrt{2}$
 (B) 2 e 4
 (C) $2\sqrt{2}$ e 4
 (D) $\sqrt{2}$ e 4
 (E) $2\sqrt{2}$ e $4\sqrt{2}$
- (10) Di un triangolo si conoscono le lunghezze di due mediane, che sono 10 e 12. Quanto può essere, al massimo, l'area del triangolo?
- (A) 100
 (B) 60
 (C) 80
 (D) 90
 (E) può essere arbitrariamente grande

PROBLEMI

- (1) La circonferenza γ' è tangente ed interna alla circonferenza γ nel punto T . Preso un punto X (diverso da T) su γ' , sia AB la corda di γ tangente a γ' in X , e siano A' e B' i punti d'intersezione di γ' con TA e con TB , rispettivamente.
- Dimostrare che le corde AB e $A'B'$ giacciono su rette parallele.
 - Dimostrare che TX è la bisettrice dell'angolo \widehat{ATB} .
 - Dimostrare che il triangolo $A'XB'$ è isoscele.
 - Come va scelto X affinché il quadrilatero $TA'XB'$ sia circoscrivibile ad un cerchio?

Soluzione.

- (a) Tracciare la retta t , tangente in T alle circonferenze. L'angolo α compreso tra t e TA è uguale sia a $\widehat{TB'A'}$ sia a \widehat{TBA} , per il caso estremo del teorema dell'angolo al centro. Formando con TB due angoli corrispondenti uguali, le rette AB e $A'B'$ sono parallele.



In alternativa: γ' e γ si corrispondono in un'omotetia di centro T , che manda A' in A e B' in B , e quindi la retta $A'B'$ nella retta AB . Perciò le due rette sono parallele: un'omotetia porta sempre una retta in una sua parallela.

- (b) Risulta essere:
 $\widehat{A'TX} = \widehat{A'XA}$ (insistono sull'arco $A'X$)
 $\widehat{A'XA} = \widehat{XAB'}$ (alterni interni tra due parallele)
 $\widehat{XA'B'} = \widehat{B'TX}$ (insistono sull'arco $B'X$).
- (c) Le corde XA' e XB' sono viste in γ' da angoli alla circonferenza uguali.
- (d) Il quadrilatero $TA'XB'$ è circoscrivibile se e solo se le somme dei lati opposti sono uguali. Dato che $XA' = XB'$, ciò equivale ad avere $TA' = TB'$, vale a dire che X sia il punto diametralmente opposto a T .

- (2) Sappiamo che un numero reale è *razionale* se si può esprimere come a/b , dove a e b sono interi ($b \neq 0$).
- (a) Dimostrare che lo sviluppo decimale di un numero razionale o è limitato oppure è illimitato periodico.
 - (b) Dimostrare che, viceversa, ogni numero che sia limitato, oppure illimitato periodico, è razionale.
 - (c) Enunciare e dimostrare un criterio che stabilisca, in base al denominatore n , se la frazione m/n (ridotta ai minimi termini) abbia uno sviluppo decimale limitato.
 - (d) Si consideri il numero reale $s = 0,101001000100001\dots$, nel cui sviluppo decimale le cifre sono tutte 0 oppure 1 ed il numero di 0 tra due 1 consecutivi aumenta ogni volta di un'unità. Dimostrare che il numero s non è razionale.

Soluzione.

- (a) Sia a/b un razionale. Il segno non è rilevante e il caso $a = 0$ è banale (possiamo assumere $a, b > 0$). Per trovare lo sviluppo decimale di a/b , si tratta di eseguire la divisione continuata di a per b , proseguendo indefinitamente.
Se il resto a un certo punto è 0 si è terminato (decimale limitato), altrimenti si va avanti all'infinito.
Ogni volta la cifra successiva che si ottiene dipende solo dal resto parziale ottenuto nell'ultimo passo, il quale viene moltiplicato per 10 e diviso per b . Dato che, dividendo per b , i resti possibili sono un numero finito (da 0 a $b - 1$), prima o poi si incontra due volte lo stesso resto e da quel momento si otterranno ancora le stesse cifre nello stesso ordine indefinitamente (decimale periodico).
- (b) Un decimale limitato è una frazione con denominatore una potenza di 10, quindi è razionale.
Sia ora x un decimale periodico, il cui periodo abbia n cifre.
Allora $10^n x$ ha lo stesso periodo di x e le cifre periodiche di x hanno ciascuna valore uguale alle cifre che si trovano nelle posizioni corrispondenti di $10^n x$. Pertanto nel numero $y = 10^n x - x = (10^n - 1)x$ si cancellano tutte le cifre del periodo e si trova un decimale limitato, dunque razionale. Quindi anche x è razionale ($x = \frac{y}{10^n - 1}$).
Ad esempio: sia x il numero periodico $3, \overline{14}$. Allora $100x = 314, \overline{14}$, e perciò:
 $100x - x = 314, \overline{14} - 3, \overline{14} = 314 - 3$. Dunque $99x = 311$, ossia $x = \frac{311}{99}$.
- (c) La frazione m/n , ridotta ai minimi termini, ha uno sviluppo decimale limitato se e solo se n non è divisibile per alcun numero primo eccetto (al più) 2 e 5. Infatti.
Un decimale limitato è una frazione $\frac{h}{10^k}$ con denominatore una potenza di 10: il denominatore non è divisibile per primi diversi da 2 e da 5. Riducendo ai minimi termini non potranno comparire nel denominatore altri fattori primi inizialmente assenti.
Viceversa: se il denominatore non contiene altri fattori primi all'infuori di 2 e 5, basterà moltiplicare tale denominatore (insieme anche al numeratore) per una potenza di 2 o di 5, in modo da pareggiare i fattori 2 ed i fattori 5. Allora la frazione sarà equivalente a un decimale limitato.
Ad esempio: $\frac{63}{80} = \frac{63}{2^4 \cdot 5} = \frac{63 \cdot 5^3}{2^4 \cdot 5^4} = \frac{7875}{10^4} = 0,7875$.
- (d) Il decimale s non è limitato: non succede mai che da un certo punto in poi le cifre son tutte 0. In base a quanto visto in (a), basterà far vedere che non è neppure periodico. Supponiamo, per assurdo, che abbia un periodo di lunghezza n . Allora qualsiasi sequenza di n cifre consecutive prese nella parte periodica dovrebbe a sua volta costituire un periodo. Ma, qualunque sia n , prima o poi vi sono almeno n cifre uguali a 0 consecutive, che possiamo andare a trovare in avanti quanto vogliamo, anche dopo che è già iniziata la parte periodica, e quindi il periodo dovrebbe essere 0. Contraddizione.

- (3) Abbiamo a disposizione piastrelle quadrate che possono essere rosse oppure blu.
- (a) Mostrare che vi sono 2^7 possibilità di formare una fila di 8 piastrelle, in modo che vi sia un numero dispari di piastrelle blu.
 - (b) Stabilire quante sono le possibili colorazioni di un pavimento rettangolare formato da 7 file di 8 piastrelle ciascuna, tali che in ogni fila da 8 vi sia un numero dispari di piastrelle blu.
 - (c) Stabilire quante sono le possibili colorazioni di un pavimento 8×8 privato di una piastrella in un angolo, tali che in ogni riga da 8 ed in ogni colonna da 8 vi sia un numero dispari di piastrelle blu.
 - (d) Stabilire quante sono le possibili colorazioni di un pavimento 8×8 , tali che in ogni riga ed in ogni colonna da 8 vi sia un numero dispari di piastrelle blu.

Soluzione.

- (a) Scelto arbitrariamente un sottoinsieme, eventualmente anche vuoto, delle prime 7 piastrelle, che viene colorato di blu, c'è precisamente una scelta per l'ottava, a seconda che fino a quel momento ne siano state colorate di blu un numero pari o dispari. Il numero dei sottoinsiemi di un insieme di 7 elementi è 2^7 , che fornisce quindi il numero di possibilità.
- (b) Ripetendo la stessa cosa per 7 volte, si trova $(2^7)^7 = 2^{49}$.
- (c) Dopo aver colorato ogni riga orizzontale (da 8), rispettando il criterio assegnato nella parte (b) (in 2^{49} modi possibili), l'ultima riga (da 7) è univocamente determinata (dal numero di blu in ogni colonna verticale). Le possibilità sono quindi sempre 2^{49} .
- (d) Dopo aver colorato tutta la scacchiera tranne una casella d'angolo, rispettando il criterio assegnato nella parte (c) (in 2^{49} modi possibili), resta da vedere la casella rimanente. La riga e la colonna da 7 hanno la stessa parità di tessere blu, in entrambi i casi la parità opposta a quella della sotto-scacchiera 7×7 . Pertanto si potrà scegliere in un solo modo anche il colore dell'ultima casella, in maniera compatibile con il criterio assegnato sia in orizzontale sia in verticale. Dunque ci sono ancora 2^{49} possibilità.