

INdAM

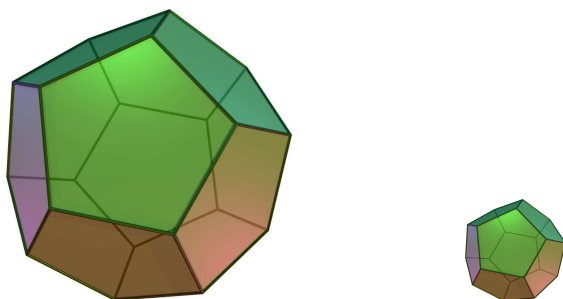
Prova scritta per il concorso a n. 40 borse di studio per studenti universitari di Matematica
Progetto Lauree Scientifiche – Istituto Nazionale di Alta Matematica
Anno accademico 2007–2008

La prova consiste in dieci quesiti a risposta multipla ed in tre problemi di cui si richiede lo svolgimento.
In ogni **quesito a risposta multipla**, solo una tra le cinque risposte indicate è esatta. Saranno attribuiti:
0 punti per ogni risposta sbagliata, 1,5 punti per ogni risposta non data, 5 punti per ogni risposta esatta.
Le risposte ai quesiti vanno fornite nello schema allegato.
Per ogni **problema** verrà assegnato un punteggio da 0 a 20.
La durata della prova è di **tre ore**. È vietato l'uso di qualsiasi strumento di calcolo o di comunicazione.

QUESTIONARIO

- (1) Lanciando tre dadi, qual è la probabilità che il prodotto dei numeri ottenuti sia multiplo di 3?
- (A) $91/216$
 - (B) $2/3$
 - (C) $5/9$
 - (D) $19/27$
 - (E) 1
- (2) In una pagina di un vecchio manoscritto matematico il testo si è rovinato e non è più leggibile. Si riesce a capire che, se due numeri positivi x e y soddisfano una certa proprietà, allora solo una delle affermazioni seguenti è vera. Quale?
- (A) $x^2 > 2y^2$
 - (B) $x > y^2$
 - (C) $x > 2y$
 - (D) $x^2 > y^2$
 - (E) $x > y$
- (3) Quanti sono gli interi positivi n di due cifre tali che $10n$ è uguale ad 11 volte la somma dei quadrati delle due cifre di n ?
- (A) 11
 - (B) 2
 - (C) 1
 - (D) 4
 - (E) nessuno
- (4) Un triangolo rettangolo ha i cateti che misurano 30 e 40. Tracciando dal vertice dell'angolo retto l'altezza, la mediana e la bisettrice, l'ipotenusa viene divisa in quattro segmenti. Qual è la misura del più corto tra essi?
- (A) $25/8$
 - (B) $16/5$
 - (C) $15/4$
 - (D) $25/6$
 - (E) $24/7$
- (5) Paola vuole riempire una tabella 4×4 scrivendo in ogni casella il numero 0 oppure 1, in maniera che su nessuna riga e su nessuna colonna la somma superi 1. In quanti modi Paola può riempire la tabella?
- (A) 209
 - (B) 93
 - (C) 69
 - (D) 196
 - (E) 65

- (6) Due dodecaedri regolari hanno volume V' e V'' e superficie totale di area, rispettivamente, A' e A'' .



Sappiamo che $A'/A'' = 8$ e che V'' vale $\sqrt{10}$. Qual è il valore di V' ?

- (A) $64\sqrt{10}$
 (B) $32\sqrt{5}$
 (C) $8\sqrt{10}$
 (D) $20\sqrt{2}$
 (E) $4\sqrt{5}$
- (7) I numeri x_1, x_2, \dots, x_k sono diversi tra loro, e tutti inversi di numeri naturali: sono cioè della forma $1/n$. Sapendo che le differenze tra termini consecutivi sono tutte uguali, cioè che $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3 = \dots$, possiamo affermare che il numero k
- (A) può essere arbitrariamente grande
 (B) è al massimo 4
 (C) è al massimo 3
 (D) è al massimo 12
 (E) è al massimo 2
- (8) La successione di interi a_n è costruita in questo modo: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, e, per $n > 1$, a_n si ottiene sottraendo da a_{n-1} la somma di tutti i termini precedenti: $a_n = a_{n-1} - (a_0 + \dots + a_{n-2})$. Ad esempio, $a_2 = a_1 - a_0$, $a_3 = a_2 - (a_0 + a_1)$, $a_4 = a_3 - (a_0 + a_1 + a_2)$, e così via. Qual è il valore di a_{2007} ?
- (A) 4^{502}
 (B) 0
 (C) -2^{1002}
 (D) 2^{1003}
 (E) -4^{669}
- (9) In un cerchio di raggio 1, le corde AC e BD si intersecano ortogonalmente in un punto interno al cerchio, diverso dal suo centro. Al variare delle possibili scelte dei punti A, B, C, D , la somma $\overline{AC} + \overline{BD}$ delle lunghezze delle corde assume tutti e soli i valori compresi tra
- (A) $2\sqrt{2}$ e $4\sqrt{2}$
 (B) $2\sqrt{2}$ e 4
 (C) 2 e 4
 (D) $\sqrt{2}$ e 4
 (E) 2 e $3\sqrt{2}$
- (10) Di un triangolo si conoscono le lunghezze di due mediane, che sono 10 e 12. Quanto può essere, al massimo, l'area del triangolo?
- (A) può essere arbitrariamente grande
 (B) 80
 (C) 60
 (D) 90
 (E) 100

PROBLEMI

- (1) La circonferenza γ' è tangente ed interna alla circonferenza γ nel punto T . Preso un punto X (diverso da T) su γ' , sia AB la corda di γ tangente a γ' in X , e siano A' e B' i punti d'intersezione di γ' con TA e con TB , rispettivamente.
- (a) Dimostrare che le corde AB e $A'B'$ giacciono su rette parallele.
 - (b) Dimostrare che TX è la bisettrice dell'angolo \widehat{ATB} .
 - (c) Dimostrare che il triangolo $A'XB'$ è isoscele.
 - (d) Come va scelto X affinché il quadrilatero $TA'XB'$ sia circoscrivibile ad un cerchio?
- (2) Sappiamo che un numero reale è *razionale* se si può esprimere come a/b , dove a e b sono interi ($b \neq 0$).
- (a) Dimostrare che lo sviluppo decimale di un numero razionale o è limitato oppure è illimitato periodico.
 - (b) Dimostrare che, viceversa, ogni numero che sia limitato, oppure illimitato periodico, è razionale.
 - (c) Enunciare e dimostrare un criterio che stabilisca, in base al denominatore n , se la frazione m/n (ridotta ai minimi termini) abbia uno sviluppo decimale limitato.
 - (d) Si consideri il numero reale $s = 0,101001000100001\dots$, nel cui sviluppo decimale le cifre sono tutte 0 oppure 1 ed il numero di 0 tra due 1 consecutivi aumenta ogni volta di un'unità. Dimostrare che il numero s non è razionale.
- (3) Abbiamo a disposizione piastrelle quadrate che possono essere rosse oppure blu.
- (a) Mostrare che vi sono 2^7 possibilità di formare una fila di 8 piastrelle, in modo che vi sia un numero dispari di piastrelle blu.
 - (b) Stabilire quante sono le possibili colorazioni di un pavimento rettangolare formato da 7 file di 8 piastrelle ciascuna, tali che in ogni fila da 8 vi sia un numero dispari di piastrelle blu.
 - (c) Stabilire quante sono le possibili colorazioni di un pavimento 8×8 privato di una piastrella in un angolo, tali che in ogni riga da 8 ed in ogni colonna da 8 vi sia un numero dispari di piastrelle blu.
 - (d) Stabilire quante sono le possibili colorazioni di un pavimento 8×8 , tali che in ogni riga ed in ogni colonna da 8 vi sia un numero dispari di piastrelle blu.