

Algebra

Problemi dimostrativi (lavoro singolo)

- A1. Determinare per quali n interi positivi la seguente equazione ha esattamente 2013 soluzioni reali positive

$$\frac{1}{x + n^{-2}} = \left\lfloor \frac{1}{x} - n^{-2} \right\rfloor.$$

Ovviamente $\lfloor y \rfloor$ denota la parte intera di y .

- A2. Per ogni $n \geq 2$ intero, siano a_n , b_n e c_n gli unici numeri interi tali che

$$(\sqrt[3]{2} - 1)^n = a_n + b_n \sqrt[3]{2} + c_n \sqrt[3]{4}.$$

Si dimostri che $c_n \equiv 1 \pmod{3}$ se e solo se $n \equiv 2 \pmod{3}$.

- A3. Dimostrare che per ogni terna $a, b, c \geq 0$ per cui $a + b + c = 3$, si ha

$$3(a^4 + b^4 + c^4) + 33 \geq 14(a^2 + b^2 + c^2).$$

- A4. Sia $p(x)$ un polinomio a coefficienti reali di grado $2n - 1$ tale che $p(k) = |k|$ per $k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$. Quanto vale $p(0)$?

Problemi dimostrativi (lavoro di gruppo)

- A5. Dato N intero positivo e $a \in (0, 1)$, trovare la costante $C(a, N)$ ottimale affinché per ogni scelta di $n \geq 1$ interi distinti k_1, k_2, \dots, k_n si abbia

$$\left(\sum_{i=1}^n a^{k_i} \right)^N \leq C(a, N) \sum_{i=1}^n a^{Nk_i}.$$

- A6. Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che soddisfano l'equazione

$$f(x + yf(x)) = f(f(x)) + xf(y).$$

per ogni coppia di reali x, y .

- A7. Determinare il più piccolo numero reale M tale che la disuguaglianza

$$|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

valga per tutte le scelte di a, b e c reali.

- A8. Determinare tutti i polinomi a coefficienti interi $p(x)$ tali che per ogni coppia di interi positivi a e b la cui somma è un quadrato perfetto, pure $p(a) + p(b)$ è un quadrato perfetto.

Combinatoria

Problemi dimostrativi (lavoro singolo)

- C1. Una scacchiera $n \times n$ è inizialmente colorata a scacchi bianchi e neri alternati, come al solito. Ad ogni mossa si sceglie un quadrato 2×2 e si colorano i suoi quadrati bianchi di nero, quelli neri di verde, quelli verdi di bianco. Per quali n si può ottenere la scacchiera con la colorazione iniziale invertita dopo un certo numero di mosse?
- C2. Barbara ha a disposizione una riga di m caselle ordinate in linea retta; Alberto dei numeri da 1 a N . Una partita consiste di k turni, durante ciascuno dei quali Alberto sceglie uno dei suoi numeri e Barbara deve scriverlo in una delle caselle ancora libere. Barbara vince se alla fine dei turni i k numeri che ha scritto sono in ordine crescente. Per quali m e k Barbara ha una strategia vincente?
- C3. Un poligono è costituito da un numero finito di caselle di un piano colorato a scacchi bianchi e neri. Se l'area del poligono è S e il suo perimetro è P , dimostrare che il numero degli scacchi dello stesso colore nel poligono è almeno $\frac{S}{2} - \frac{P}{8}$ e al più $\frac{S}{2} + \frac{P}{8}$.
- C4. S è un insieme di numeri naturali di 100 cifre; un elemento di S si dice *cattivo* se non è divisibile per la somma di altri due numeri di S (non necessariamente distinti). Si sa che S contiene al più 10 numeri cattivi: quanti elementi può avere S , al massimo?

Problemi dimostrativi (lavoro di gruppo)

- C5. Da una scacchiera $n \times n$ eliminiamo i quadrati di riga e colonna simultaneamente pari. Quant'è il minimo numero di pezzi rettangolari con cui si può coprire (esattamente) quello che resta, senza sovrapposizioni?
- C6. Data nel piano cartesiano una famiglia \mathcal{F} di 2013 rettangoli del tipo $[a, b] \times [c, d]$ tali che ciascuno interseca almeno 1509 degli altri, mostrare che esiste almeno un rettangolo di \mathcal{F} che interseca tutti gli altri.
- C7. Un cerchio è diviso in $2n + 1$ archi uguali da $2n + 1$ punti. A turno, cominciando da Alberto, Alberto e Barbara cancellano un punto; vince chi lascia punti che, a tre a tre, sono sempre vertici di triangoli ottusangoli. Chi ha una strategia vincente (al variare di n)?
- C8. Dimostrare che si possono orientare gli archi di un grafo planare finito in modo che per ogni vertice il numero di archi uscenti sia al più 3.
- C9. [LUNCH PROBLEM] Il piano infinito è colorato a scacchi bianchi e neri; gli scacchi neri vengono però ricolorati di verde e di rosso, in modo che caselle con un vertice in comune abbiano colori diversi. Fissata una retta non parallela ai lati delle caselle, dimostrare che esiste una costante C tale che, per ogni segmento parallelo alla retta, la differenza tra la lunghezza complessiva della zona verde e quella della zona rossa ha modulo minore o uguale di C .

Geometria

Problemi dimostrativi (lavoro singolo)

- G1. Sia $\triangle ABC$ un triangolo acutangolo di ortocentro H e circocentro O . L'asse di AH incontra AB e AC in D ed E .

Dimostrare che $\widehat{DOA} = \widehat{EOA}$.

- G2. Sia data una circonferenza ω_1 internamente tangente alla circonferenza ω_2 nel punto N . Si prenda un punto K su ω_1 e si tracci la tangente ad essa per tale punto; siano A e B le intersezioni della retta con ω_2 . Sia M il punto medio dell'arco AB che non contiene N .

Dimostrare che il raggio della circonferenza circoscritta al triangolo $\triangle KBM$ non dipende da K .

- G3. Nel triangolo $\triangle ABC$, sia AD l'altezza e P un punto su di essa. Si indichino con Q , R le proiezioni di P su AB , AC e con S , T le intersezioni di QP , RP con BC . Le circonferenze circoscritte a $\triangle BQS$ e $\triangle CRT$ intersecano QR in X , Y .

Dimostrare che SX , TY , AD concorrono in un punto.

- G4. Siano AA' , BB' , CC' tre diametri del cerchio circoscritto al triangolo $\triangle ABC$. Sia P un punto all'interno del triangolo $\triangle ABC$, e siano D , E , F le proiezioni di P su BC , CA , AB , rispettivamente. Sia X il punto tale che D è il punto medio di $A'X$, sia Y il punto tale che E è il punto medio di $B'Y$, e similmente sia Z il punto tale che F è il punto medio di $C'Z$.

Dimostrare che il triangolo $\triangle XYZ$ è simile al triangolo $\triangle ABC$.

Problemi dimostrativi (lavoro di gruppo)

- G5. Sia Γ una circonferenza e si considerino tre punti allineati E, F, G tali che F sia all'interno di Γ e gli altri due all'esterno.

Dimostrare che, se $ABCD$ un qualsiasi quadrilatero inscritto in Γ tale che E, F, G appartengono alle rette AB, AD, DC rispettivamente, allora il lato BC passa per un punto fisso allineato con E, F, G , indipendente dalla scelta del quadrilatero $ABCD$.

- G6. Sia $\triangle ABC$ un triangolo, siano D, E, F i piedi delle altezze sui lati BC, CA, AB ; siano poi P, Q, R i piedi delle altezze da D su EF , da E su DF , da F su ED .

Dimostrare che AP, BQ, CF concorrono sulla retta di Eulero di $\triangle ABC$.

- G7. Siano Γ e ω le circonferenze circoscritta ed inscritta del triangolo $\triangle ABC$. Sia X il piede su BC della bisettrice da A ; si definiscano similmente Y e Z . Sia D il punto di tangenza di ω con BC ; si definiscano similmente E e F . Sia ω_A la circonferenza tangente internamente a Γ e tangente alle rette AC e AB . Sia A' il punto di tangenza tra Γ e ω_A . Si definiscano similmente B' e C' .

Dimostrare che $B'C'XD, C'A'YE, A'B'ZF$ sono ciclici.

- G8. Sia $\triangle ABC$ un triangolo e sia ω la sua circonferenza circoscritta. Sia inoltre l una retta che non abbia punti in comune con ω . Sia P il piede della perpendicolare condotta dal centro di ω a l . Le rette BC, AC e AB intersecano l nei punti X, Y e Z , diversi da P .

Dimostrare che le circonferenze circoscritte ai triangoli $\triangle AXP, \triangle BYP$ e $\triangle CZP$ hanno un punto in comune diverso da P , oppure sono mutualmente tangenti in P .

Teoria dei numeri

Problemi dimostrativi (lavoro singolo)

- N1. (a) Determinare tutti gli interi positivi k con la proprietà seguente: per ogni numero primo dispari p esiste un intero positivo n tale che

$$p|k^n - n \quad \text{e} \quad p|k^{n+1} - (n+1).$$

- (b) Determinare tutti gli interi positivi k con la proprietà seguente: per ogni numero primo dispari p esiste un intero positivo n tale che

$$p|k^n - n^2 \quad \text{e} \quad p|k^{n+1} - (n+1)^2.$$

- N2. Sia $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una funzione crescente e sia n un intero positivo. Supponiamo che esistano numeri primi p_1, \dots, p_n e numeri naturali r_1, \dots, r_n tali che per ogni $i = 1, \dots, n$ l'insieme $\{f(p_i k + r_i) \mid k = 1, 2, \dots\}$ sia una progressione aritmetica infinita. Dimostrare che esiste un numero naturale a tale che

$$f(a+1), \dots, f(a+n)$$

è una progressione aritmetica.

- N3. Determinare tutti gli interi positivi n per i quali esistono interi n_1, \dots, n_k , maggiori di 3 tali che

$$n = n_1 n_2 \dots n_k = 2^{\frac{1}{2^k}(n_1-1)(n_2-1)\dots(n_k-1)} - 1.$$

- N4. Per un numero reale x , denotiamo con $\{x\}$ la *parte frazionaria* di x , ossia $\{x\} = x - [x]$ (ad esempio, $\{\pi\} = 0,14\dots$).

Determinare il massimo valore di $c \in \mathbb{R}$ per cui

$$\{n\sqrt{3}\} > \frac{c}{n\sqrt{3}} \quad \text{per tutti gli interi } n \geq 1.$$

Problemi dimostrativi (lavoro di gruppo)

N5. Determinare tutte le coppie (m, n) di interi positivi che soddisfano l'equazione

$$m + n - \frac{3mn}{m + n} = \frac{2011}{3}.$$

N6. Dimostrare che per ogni p primo dispari si ha

$$1^{p-1} + 2^{p-1} + \dots + (p-1)^{(p-1)} \equiv p + (p-1)! \pmod{p^2}.$$

N7. Trovare tutte le coppie di interi coprimi a, b per cui esistono solo un numero finito di naturali n tali che $n^2 | (a^n + b^n)$.

N8. Siano m, n interi positivi tali che $\phi(5^m - 1) = 5^n - 1$, dove ϕ è la funzione di Eulero. Dimostrare che il massimo comune divisore fra m ed n è maggiore di 1.