

10. La punizione di Ψsifo

Come punizione per aver sfidato gli dei, Ψsifo fu condannato a fare conti di combinatoria per 2014 giorni di fila. Gli vennero date 2014 palline e 2014 scatole, sia le palline che le scatole numerate con numeri distinti da 1 a 2014; nel giorno N , per ogni N tra 1 e 2014, egli doveva calcolare il numero di modi diversi di disporre le palline nelle scatole, una per scatola, in modo che le palline numerate da 1 a N fossero nelle scatole riportanti il numero corrispondente, e quelle da $N + 1$ a 2014 invece fossero ognuna in una scatola riportante un numero diverso dal proprio. Per quanti dei 2014 giorni Ψsifo dovette rispondere un numero pari?

Soluzione:

Analizzando il problema "al contrario" cioè si definisca $n=2014-N$, e partendo dall'ultimo giorno $N=2014$ basta analizzare le dismutazioni per n che va da 0 a 2014.

Premettiamo il concetto di **Dismutazione**: è una composizione, dipendente dall'ordine, formata da n elementi distinti che, rispetto ad una loro composizione di base, ha ogni suo elemento in una posizione diversa.

Es.: Se abbiamo gli elementi 1-2-3, una loro dismutazione sarà 2-3-1, e non sarà una dismutazione 1-3-2; quindi in buona sostanza trattasi di una permutazione che non lascia al proprio posto alcun elemento.

Il **numero di dismutazioni** di un insieme di n elementi è dato dalla formula:

$$Dism_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{n!}{i!}$$

$$\text{Es.: } Dism_3 = (-1)^0 \frac{3!}{0!} + (-1)^1 \frac{3!}{1!} + (-1)^2 \frac{3!}{2!} + (-1)^3 \frac{3!}{3!} = 3! - 3! + \frac{3!}{2!} - 1 = \frac{3!}{2!} - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$Dism_4 = (-1)^0 \frac{4!}{0!} + (-1)^1 \frac{4!}{1!} + (-1)^2 \frac{4!}{2!} + (-1)^3 \frac{4!}{3!} = 4! - 4! + \frac{4!}{2!} - \frac{4!}{3!} + 1 = \frac{4!}{2!} - \frac{4!}{3!} + 1 = 9$$

Si noti che per $n>0$ i primi due termini si annullano sempre, quindi facile capire che $Dism_0 = 1$, $Dism_1 = 0$, e in seguito

si noti che $Dism_4 = \frac{4!}{2!} - \frac{4!}{3!} + 1 = 4 \left(\frac{3!}{2!} - 1 \right) + 1 = 4Dism_3 + 1$, e inoltre si può verificare facilmente che:

$Dism_5 = 5Dism_4 - 1$; infatti si dimostra la formula delle dismutazioni per ricorrenza:

$$Dism_{n+1} = (n+1)Dism_n + (-1)^{n+1}$$

Basta costruire una tabella e ragionare a questo punto:

n	0	1	2	3	4	5
$Dism_n$	1	0	$2 \cdot 0 + (-1)^2 = 1$	$3 \cdot 1 + (-1)^3 = 2$	$4 \cdot 2 + (-1)^4 = 9$	$5 \cdot 9 + (-1)^5 = 44$
Pari/Disp.	Disp	Pari	Disp	Pari	Dispari	Pari

In generale si nota che $Dism_6 = 6Dism_5 + 1$ ma dal momento che $Dism_5$ è pari, e 6 è pari si ottiene che $Dism_6$ è dispari. Così $Dism_7 = 7Dism_6 - 1$ pari in quanto sarebbe il prodotto di due dispari diminuito di 1. Otteniamo che le dismutazioni si alternano in Dispari e Pari partendo da 0. Quindi la soluzione del quesito sarà 1007.

Risposta 1007