Stage Senior Pisa 2012 – Test Iniziale

Tempo concesso: 135 minuti	**Valutazione**: risposta errata 0, mancante 2, esatta 5

1. Sia k il più piccolo numero reale tale che
$$x^3 + y^5 + k \geq xy$$
per ogni coppia di numeri reali positivi x e y.
Determinare quale dei seguenti numeri è razionale.

   (A) k^{2012} **(B)** k^{2013} **(C)** k^{2014} **(D)** k^{2015} **(E)** k^{2016}

2. Determinare la più piccola costante reale k tale che
$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \leq k\sqrt{\frac{a^2}{b^4} + \frac{b^2}{c^4} + \frac{c^2}{a^4}}$$
per ogni terna di numeri reali positivi (a, b, c) tali che $a^4 + b^4 + c^4 = 4$.

   (A) 2 **(B)** 4 **(C)** $\sqrt{2}$ **(D)** $2\sqrt{2}$ **(E)** $2\sqrt[4]{3}$

3. Sia $p(x)$ un polinomio a *coefficienti interi* tale che $p(p(1)) = 6$.
Determinare *quanti* sono i possibili valori di $p(1)$.

   (A) 1 **(B)** 2 **(C)** 4 **(D)** 8 **(E)** Infiniti

4. Alcuni amici stanno considerando l'insieme $\mathcal{S}$ di tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che
$$f(x + f(y)) = f(x) + f(y)$$
per ogni coppia di numeri reali x e y.
   - Alberto afferma: "$\mathcal{S}$ contiene infinite funzioni surgettive".
   - Barbara afferma: "esiste una funzione in $\mathcal{S}$ la cui immagine ha esattamente 2012 elementi".
   - Cristina afferma: "in $\mathcal{S}$ esiste un'unica funzione che sia iniettiva e tale che $f(1) = 2012$".
   - Dario afferma: "in $\mathcal{S}$ esistono infinite funzioni non iniettive".

   Chi ha ragione?

   (A) Nessuno **(B)** Solo Alberto **(C)** Tutti tranne Barbara
   (D) Solo Alberto e Cristina **(E)** Tutti

5. L'ipercalcio è uno sport giocato tra 2 squadre, entrambe composte da 2012 giocatori. Ogni giocatore ha un ruolo fisso a scelta tra portiere, difensore, centrocampista, attaccante. Da regolamento, ogni squadra deve necessariamente avere almeno 4 portieri, almeno 7 difensori, almeno 5 centrocampisti, almeno 2 attaccanti.

   Il *modulo tattico* di una squadra è la quaterna ordinata di interi che esprime il numero di portieri, difensori, centrocampisti, attaccanti (ad esempio, il 1000–1005–5–2 è noto come modulo all'italiana).

   Determinare quanti sono i possibili moduli tattici nell'ipercalcio.

   (A) $\binom{1998}{3}$ **(B)** $\binom{1998}{4}$ **(C)** $\binom{1997}{3}$ **(D)** $\binom{1997}{4}$ **(E)** $\binom{1996}{4}$

6. Sia $X = \{1, 2, 3, \ldots, 2012\}$, e sia $Y = [\mathcal{P}(X)]^3$ l'insieme delle terne ordinate di sottoinsiemi (vuoti o non vuoti) di X.

   Determinare la massima potenza di 2 che divide

$$\sum_{(A,B,C)\in Y} |(A \cup B) \setminus C|.$$

   (A) 2^{6035} **(B)** 2^{6036} **(C)** 2^{6037} **(D)** 2^{6038} **(E)** 2^{6039}

7. Un rettangolo è suddiviso in $77 \cdot 55$ quadratini unitari. La suddivisione determina una griglia composta da tutti i segmenti che costituiscono il bordo dei singoli quadratini.

   Si vuole costruire un cammino continuo che parta da un vertice del rettangolo e faccia ritorno allo *stesso vertice* dopo aver percorso almeno una volta ogni segmento. Ovviamente è concesso passare più volte dallo stesso punto, ed anche percorrere più volte lo stesso segmento.

   Determinare quanto sarà lungo, come minimo, il cammino (si consideri come unità di misura la lunghezza del lato dei quadratini).

   (A) 8062 **(B)** 8732 **(C)** 8734 **(D)** 8864 **(E)** 8866

8. Un quadrato 666×666 è stato tassellato utilizzando mattonelle 5×1 (rispettando la quadrettatura, senza uscire dai bordi o creare sovrapposizioni). Al termine dell'operazione, è rimasta scoperta esattamente una casella.

   Determinare in *quante* posizioni si può trovare l'unica casella scoperta.

   (A) 134^2 **(B)** 666×134 **(C)** 133×4 **(D)** $\dfrac{666^2 - 1}{5}$ **(E)** $\dfrac{666^2 + 4}{5}$

9. In un triangolo ABC si ha che $AB = 6$, $BC = 8$, $CA = 10$. Una circonferenza interseca il lato AB in C_1 e C_2, il lato BC in A_1 ed A_2, il lato CA in B_1 e B_2.

   Si sa che $A_1A_2 = B_1B_2 = C_1C_2 = 2$.

   Determinare l'area dell'esagono convesso con vertici in A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2.

   (A) $\frac{60}{5}$ **(B)** $\frac{62}{5}$ **(C)** $\frac{64}{5}$ **(D)** $\frac{66}{5}$ **(E)** $\frac{68}{5}$

10. Siano O ed H due punti distinti del piano. Sia $\mathcal{G}$ il luogo dei baricentri di tutti i triangoli che hanno circocentro O e ortocentro H.

    Il luogo $\mathcal{G}$ è costituito da ...

    (A) un punto **(B)** un segmento **(C)** una retta **(D)** una circonferenza

    (E) un cerchio

11. Sia $ABCD$ un quadrilatero convesso, sia P il punto di incontro delle diagonali, e sia O il circocentro di PBC. Sappiamo che $PA = 1$, $PB = 2$, $PC = 6$, $PD = 3$, e che OA è perpendicolare ad AD.

    Determinare il raggio della circonferenza circoscritta a PBC.

    (A) $\sqrt{9}$ **(B)** $\sqrt{10}$ **(C)** $\sqrt{11}$ **(D)** $\sqrt{12}$ **(E)** $\sqrt{13}$

12. Sia ABC un triangolo *non equilatero*, sia I l'incentro, siano D, E, F i punti in cui la circonferenza inscritta ad ABC è tangente ai lati BC, CA, AB, rispettivamente, e sia K l'ortocentro di DEF.

    Consideriamo l'inversione rispetto alla circonferenza inscritta ad ABC.

    Determinare quale delle seguenti affermazioni è *falsa.*

    (A) L'immagine della retta EF è la circonferenza circoscritta al triangolo EFI

    (B) La circonferenza che passa per i punti medi di ABC contiene un unico punto che resta fisso

    (C) L'immagine della circonferenza circoscritta ad ABC passa per il punto medio di KF

    (D) L'immagine di ogni circonferenza ex-inscritta ad ABC incontra la circonferenza di diametro ID in un solo punto

    (E) L'immagine del circocentro di ABC è il punto medio di IK

13. Per ogni intero positivo n, indichiamo con $D(n)$ il valore finale che si ottiene continuando iterativamente a sommare le cifre della rappresentazione in base 10 finché non si ottiene un numero di una sola cifra. Così, per esempio, $D(4) = 4$ e $D(1997) = D(26) = D(8) = 8$.

    Determinare $D(F_{2012})$, dove F_{2012} è il 2012-esimo numero di Fibonacci.

    (Si ricorda che i numeri di Fibonacci sono definiti ricorsivamente ponendo $F_1 = F_2 = 1$ e $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ per ogni $n \geq 1$)

    (A) 1 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 6 **(E)** 9

14. L'ampiezza di un angolo α è di 2012^{2012} gradi.

    Determinare quale delle seguenti funzioni trigonometriche coincide con $\sin\alpha$.

    (A) $\cos 74°$ **(B)** $\sin 128°$ **(C)** $\sin 176°$ **(D)** $\sin 208°$ **(E)** $\cos 344°$

15. Un intero positivo n si dice *rappresentabile* se si può scrivere nella forma

$$n = \frac{2^a - 2^b}{2^c - 2^d}$$

    per un'opportuna scelta degli interi positivi a, b, c, d.

    Determinare quale delle seguenti affermazioni è *falsa*.

    (A) Il numero 9 è rappresentabile

    (B) Per ogni primo p, esiste un multiplo positivo di p che è rappresentabile

    (C) Esiste una progressione aritmetica costituita da 2012 interi positivi distinti tutti non rappresentabili

    (D) Esistono infiniti interi positivi non rappresentabili

    (E) Il numero 13 è rappresentabile

16. Consideriamo il polinomio $P(x, y) = x^{333} + y^{777}$.

    Determinare quale delle seguenti affermazioni è *falsa*.

    (A) Per ogni intero y esiste un intero x tale che $P(x, y)$ è multiplo di 11

    (B) Per ogni intero x esiste un intero y tale che $P(x, y)$ è multiplo di 11

    (C) Per ogni intero y esiste un intero x tale che $P(x, y)$ è multiplo di 19

    (D) Per ogni intero x esiste un intero y tale che $P(x, y)$ è multiplo di 19

    (E) Per ogni intero y esiste un intero x tale che $P(x, y)$ è multiplo di 31

Stage Senior Pisa 2012 – Test Finale

Problemi a risposta rapida

1. Siano a, b e c le radici complesse del polinomio $x^3 + 2x^2 + kx + 7$.

   Determinare il valore del parametro k per cui si ha che $a^3 + b^3 + c^3 = 5$.

2. Siano a_n e b_n due successioni di numeri reali tali che $a_{n+1} = 2b_n$ e $b_{n+1} = 2a_n + 3b_n$ per ogni intero positivo n.

   Sappiamo che $a_{2012} = 3$ e che la successione b_n è *limitata*.

   Determinare b_{3333}.

3. Determinare quanti sono gli anagrammi della parola "STAGISTI" in cui *almeno* una delle due T viene prima di *entrambe* le I.

4. Alberto e Barbara hanno una pila di n monete. A turno, iniziando da Alberto, prelevano un po' di monete dalla pila, con la regola che ad ogni turno bisogna prelevarne almeno una e lasciarne almeno un decimo di quelle che si sono trovate. Il giocatore che lascia nella pila una sola moneta *perde*.

   Determinare il più piccolo $n \geq 2012$ per cui Barbara ha una strategia vincente.

5. In un triangolo rettangolo, la bisettrice di un angolo acuto divide il lato opposto in due parti di lunghezza 4 e 5.

   Determinare l'area del triangolo.

6. Sia ABC un triangolo con $AB = 4$ e $AC = 6$. Sia D il punto del lato AB tale che $AD = 3$, e sia E il punto del lato AC tale che $AE = 2$.

   Sapendo che $DE = 4$, determinare il seno dell'angolo $\angle ABC$.

7. Determinare tutti i quadrati perfetti la cui rappresentazione in base 10 è del tipo $aabb$.

8. Sia n un intero positivo tale che l'espressione decimale di 2012^n ha la cifra delle unità e la cifra delle centinaia uguali a 4, cioè
$$2012^n = * * * \ldots * 4 * 4.$$

   Determinare i possibili valori della cifra delle decine.

Problemi dimostrativi

9. Dimostrare che

$$\sqrt{1-a}+\sqrt{1-b}+\sqrt{1-c} \leq \sqrt{2}\left(\sqrt{ab+bc+ca}+2\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)$$

per ogni terna di numeri reali positivi a, b, c tali che $a+b+c=1$.

10. Siano n e k numeri interi con $n \geq 5$ e $0 < k < n/2$, e siano dati n punti nel piano, ciascuno dei quali è colorato di bianco o di nero. Una k-inversione consiste nello scegliere k degli n punti, ed invertire il loro colore.

    Determinare i valori di n per cui la seguente proprietà risulta vera: per ogni colorazione iniziale, e per ogni valore ammissibile di k, esiste una sequenza di k-inversioni al termine della quale tutti i punti hanno lo stesso colore.

11. Sia I l'incentro di un triangolo ABC, sia D un punto su AI, sia E un punto su BI, e sia F un punto su CI.

    Supponiamo che I sia l'ortocentro di DEF.

    Dimostrare che i vertici del triangolo formato dagli assi di AD, BE, CF stanno sugli assi di AB, BC, CA.

12. Determinare tutti gli interi positivi n per cui esistono numeri interi (non necessariamente positivi) x e y tali che

$$x^3+y^3=n!+4.$$

Test Iniziale – Risposte

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
E	A	C	C	C	A	B	A	B	A	A	E	D	A	E	C

Test Iniziale – "Aiutini"

1. Applichiamo AM–GM a 15 termini, di cui 5 uguali a $x^3/5$, 3 uguali a $y^5/3$, e 7 uguali a $k/7$ (da dove arriva questa scelta bizzarra?). Otteniamo che

$$x^3 + y^5 + k \geq 15 \left(\frac{x^{15}}{5^5} \cdot \frac{y^{15}}{3^3} \cdot \frac{k^7}{7^7} \right)^{1/15} = 15 \left(\frac{k^7}{5^5 \cdot 3^3 \cdot 7^7} \right)^{1/15} xy.$$

Dovendo essere il coefficiente di xy uguale ad 1, si ottiene che

$$k = \frac{7}{\sqrt[7]{3^{12} \cdot 5^{10}}},$$

dunque k^m è razionale se e solo se m è divisibile per 7 (come si giustifica rigorosamente questo fatto?).

L'approccio è chiaramente equivalente ad usare una AM–GM pesata con pesi 5/15, 3/15, 7/15.

Occhio: chi ci garantisce che valori inferiori di k non vadano bene?

2. Applicando prima la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz (a cosa? come?) e poi la disuguaglianza classica $xy + yz + zx \leq x^2 + y^2 + z^2$ (come?), otteniamo che

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} &\leq \left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2\right)^{1/2} \cdot \left(\frac{a^2}{b^4} + \frac{b^2}{c^4} + \frac{c^2}{a^4} \right)^{1/2}, \\ &\leq \left(a^4 + b^4 + c^4\right)^{1/2} \cdot \left(\frac{a^2}{b^4} + \frac{b^2}{c^4} + \frac{c^2}{a^4} \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

da cui la tesi.

Occhio: questo mostra che $k = 2$ va bene; chi ci garantisce che valori inferiori di k non vadano ugualmente bene?

3. Poniamo $p(1) = k$. Sfruttando il fatto che $a - b$ divide $p(a) - p(b)$ (cos'è questa storia?), otteniamo (come? con quali scelte di a e b?) che $(k - 1)$ divide $(k - 6)$, cioè che

$$\frac{k-6}{k-1} = 1 + \frac{5}{k-1}$$

è un numero intero. Da qui si ricava che $k - 1$ può essere solo ± 1 oppure ± 5. A questo punto, per ciascuno dei 4 valori possibili per k, bisogna esibire un polinomio $p(x)$ a coefficienti interi tale che $p(1) = k$ e $p(k) = 6$ (farlo!).

4. La risposta segue dai seguenti fatti.

   - Per simmetria (di cosa?) abbiamo che

     $$f(x+f(y)) = f(x)+f(y) = f(y+f(x)).$$

     Se f è iniettiva, confrontando lhs e rhs otteniamo (perché?) che $x+f(y) = y+f(x)$. Ponendo ora $y=0$ si ha (come?) che $f(x) = x+k$ per un opportuno k, e si verifica facilmente (farlo!) che tutte queste funzioni effettivamente risolvono l'equazione funzionale.

     Questo basta per concludere che Alberto e Cristina hanno ragione (perché?).
   - L'immagine della funzione è un insieme additivamente chiuso (cosa vuol dire? come si dimostra?). Ne segue che ci sono solo 2 possibilità: o l'immagine contiene solo 0, o l'immagine ha infiniti elementi (perché?).

     Questo basta per concludere che Barbara ha torto.
   - Si verifica abbastanza facilmente (farlo!) che per ogni intero positivo k si ha che

     $$f(x) = k\left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor$$

     risolve l'equazione data (e non serve nemmeno che k sia intero positivo).

     Questo basta per dar ragione a Dario.

5. Si tratta di contare tutte le quaterne (p,d,c,a) di interi positivi tali che $p+d+c+a$ e $p \geq 4$, $d \geq 7$, $c \geq 5$, $a \geq 2$.

   Con un ovvio cambio di variabili (quale?), ci si riduce a trovare tutte le quaterne (p',d',c',a') di interi maggiori od uguali a 0 tali che $p'+d'+c'+a' = 1994$.

   Per questo conteggio c'è una formula esplicita (quale? come si dimostra?). Si ottiene così che

   $$M = \binom{1997}{3} = \frac{1997 \cdot 1996 \cdot 1995}{3 \cdot 2} = 1997 \cdot 998 \cdot 665 = 1997 \cdot 2 \cdot 499 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19.$$

6. Fissiamo un elemento $x \in X$ e contiamo quante sono le terne $(A,B,C) \in Y$ tali che $x \in (A \cup B) \setminus C$. Fatto questo, avremo il contributo di una dato x alla somma in questione (e cosa ce ne faremo?).

   Per il conteggio, notiamo intanto che deve essere che $x \notin C$. I sottoinsiemi C con questa proprietà sono 2^{2011} (perché?). Deve poi succedere che $x \in A \cup B$. Quante sono le coppie (A,B) per cui questo si realizza? Tante quante tutte le coppie, meno quelle con $x \notin A$ e $x \notin B$, quindi (perché?)

   $$2^{2012} \cdot 2^{2012} - 2^{2011} \cdot 2^{2011} = 3 \cdot 2^{4022}.$$

   Mettendo tutto insieme (come?), la somma richiesta risulta uguale a

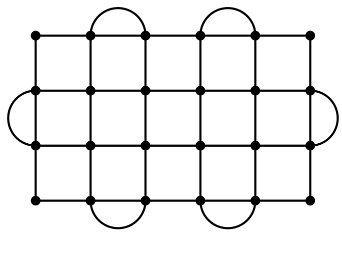
   $$2012 \cdot 2^{2011} \cdot 3 \cdot 2^{4022} = 3 \cdot 503 \cdot 2^{6035}.$$

7. Interpretiamo il reticolo come un grafo, consideriamo il percorso come un circuito, e contiamo quante volte dobbiamo passare per un dato vertice. Nel caso dei vertici del rettangolo, basta passarci una volta per "esaurire" i 2 lati che vi confluiscono. Nei restanti vertici, occorre passare

almeno 2 volte per esaurire i 3 o 4 lati che vi confluiscono. Poiché il numero dei "passaggi" è uguale al numero di lati del circuito, abbiamo che la lunghezza è almeno (da dove arriva questo conto?)

$$2 \cdot (78 \cdot 56 - 4) + 4 = 8732.$$

Questo per ora è un limite teorico, e non c'è nessuna ragione (per ora) per cui sia possibile realizzarlo. Consideriamo allora i vertici incriminati (quelli da cui parte un numero dispari di lati), ed accoppiamoli a 2 a 2 aggiungendo un lato fittizio (come nella figura sottostante, pensata per numeri più piccoli). In questo modo avremo ottenuto un grafo con esattamente 8732 lati (perché?), in cui ora da ogni vertice parte un numero pari di lati.



Per un noto risultato generale (quale?), in ogni grafo di questo tipo è possibile partire da un punto qualsiasi e far ritorno al punto stesso dopo aver percorso esattamente una volta ogni lato. Come facciamo ora ad ottenere il percorso voluto sul grafo iniziale, partendo da quello sul grafo modificato?

8. Colorando in diagonale con 5 colori si vede che "avanza una casella" del colore usato per i vertici (perché?). Il buco deve essere quindi di quel colore (perché?). Lo stesso discorso vale colorando secondo la diagonale opposta.

   I quadratini che risultano incriminati rispetto ad entrambe le colorazioni sono tutti e soli quelli "con entrambe le coordinate congrue ad 1 modulo 5" (perché?), i quali sono

$$\left\lceil \frac{666}{5} \right\rceil \cdot \left\lceil \frac{666}{5} \right\rceil = 134^2.$$

   Per completare la soluzione, bisogna ora verificare (farlo!) che, per ciasacuna di queste scelte del buco, è possibile tassellare il complementare con le mattonelle date.

9. I segmentini "vertice-circonferenza" sono a 2 a 2 uguali per ragioni di potenza (cosa?). Indicando le loro lunghezze con a, b, c (in modo ovvio, ad esempio a è la lunghezza dei 2 segmenti che partono dal vertice A), si ottiene (come?) il sistema

$$\begin{cases} a + b + 2 = 6 \\ b + c + 2 = 8 \\ c + a + 2 = 10 \end{cases}$$

   da cui banalmente $a = 3$, $b = 1$, $c = 5$. Ora si trovano le aree dei 3 triangolini (quali?) mediante la formula trigonometrica dell'area (come ci procuriamo i seni degli angoli?). La somma di tali aree è

$$\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot \frac{3}{5} = \frac{58}{5},$$

   da cui per differenza con l'area del triangolo si ottiene l'area dell'esagono.

10. Retta di Eulero: ortocentro, circocentro e baricentro sono allineati, ed in posizione fissa tra di loro (come? cosa?). Fissati due qualunque di tali punti, il terzo risulta univocamente determinato.

11. Sia M il punto medio di PB, e sia N il punto medio di PC. Allora

    - $OMAD$ è ciclico per questione di angoli retti (cosa?),
    - $MADN$ è ciclico per questione di potenza (cosa?).

    Ne segue che $OMADN$ è ciclico con diametri OD (per spiegare l'angolo retto in A) ed OA (per spiegare l'angolo retto in N). Questo non va benissimo ... (perché?)

    L'unica possibilità per evitarlo è che N coincida con O, per cui non ci sarebbe nessun angolo retto in N da spiegare. Se N coincide con O, il raggio si calcola facilmente ...

12. La soluzione segue dai seguenti fatti sull'inversione in questione.

    - I punti E ed F restano fissi, dunque la retta EF va nella circonferenza che passa per E, F, ed il centro di inversione (perché? e allora?). Questo mostra che la prima affermazione è vera.
    - La circonferenza di Feuerbach di ABC è tangente a quella inscritta (e distinta da essa visto che ABC non è isoscele), ed il punto di tangenza è l'unico suo punto che resta fisso per inversione (quali sono i punti fissi di un'inversione?). Questo mostra che la seconda affermazione è vera. Da cosa seguono questi fatti?
    - L'immagine di A, B, C sono i punti medi dei lati del triangolo DEF (perché?), quindi l'immagine della circonferenza circoscritta ad ABC è la circonferenza di Feuerbach di DEF, dunque passa per il punto medio di KF (perché?). Questo mostra che la terza affermazione è vera.

      Tuttavia, il centro non va nel centro, dunque l'immagine del circocentro di ABC non è il centro della circonferenza di Feuerbach di DEF, che sarebbe il punto medio di IK (perché?). Questo mostra che l'ultima affermazione è falsa. Perché il centro non va nel centro? In quali casi si ha che il centro va nel centro? Perché qui non è così?
    - L'immagine della retta BC è la circonferenza di diametro ID (perché?), che sarà quindi tangente alle immagini di tutte le circonferenze ex-inscritte (perché?).

13. È ben noto che $D(n)$ rappresenta la classe di resto modulo 9 di n (perché?). I numeri di Fibonacci, modulo 9, si ripetono con periodo 24 (basta calcolarli tutti fino al 24-esimo, ovviamente solo modulo 9).

    Poiché $2012 \equiv 20 \pmod{24}$, avremo che $F_{2012} \equiv F_{20} \equiv 6 \pmod{9}$, dove la classe di F_{20} segue dalla tabella calcolata precedentemente.

14. Si tratta di calcolare la classe di resto di 2012^{2012} modulo 360. Ora si ha che (perché?)

$$2012^{2012} \equiv 0 \pmod{8},$$
$$2012^{2012} \equiv 2^{2012} \equiv 2^0 \equiv 1 \pmod{5},$$
$$2012^{2012} \equiv 5^{2012} \equiv 5^2 \equiv 7 \pmod{9}.$$

Da qui si risale facilmente a dire che $2012^{2012} \equiv 16 \pmod{360}$, da cui

$$\sin\left(2012^{2012}\right)^\circ = \sin 16^\circ = \cos 74^\circ.$$

15. La soluzione segue dalle seguenti osservazioni.

- Non è molto difficile rappresentare il 9 ... (come?)
- Per ogni primo $p > 2$ si ha che

$$n = \frac{2^{p-1} - 2^0}{2^1 - 2^0} = 2^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

  E per $p = 2$?
- Limitiamoci ai numeri dispari, ottenuti con $b = d = 0$ (che non sarebbe concesso, ma è come se lo fosse in quanto ...). Se $c \geq 2$, allora numeratore e denominatore sono ... modulo 4, quindi n è ... modulo 4. Ne segue che gli unici numeri congrui a ... modulo 4 che siano rappresentabili sono quelli del tipo $2^k - 1$. Questo basta a garantire la veridicità della terza e quarta affermazione (perché?).
- Se potessimo scrivere

$$13 = \frac{2^a - 1}{2^c - 1},$$

  allora a sarebbe almeno 12 (perché?), quindi anche c sarebbe abbastanza grande (perché?), ma allora sviluppando i conti non si potrebbe avere che $13 \cdot 2^c - 2^a = 12$ in quanto al lhs ci sarebbero troppi fattori 2 ...

16. La soluzione segue dalle seguenti osservazioni.

- Si ha che $P(x, y) \equiv x^3 + y^7 \pmod{11}$ (perché? cosa ho fatto agli esponenti?). Poichè sia la potenza terza, sia la potenza settima sono surgettive modulo 11 (perché? a cosa serve?), se ne deduce che le prime due affermazioni sono vere.
- Si ha che $P(x, y) \equiv x^9 + y^3 \pmod{19}$ (perché? cosa ho fatto agli esponenti?). Modulo 18 i residui delle potenze none sono solo ± 1, mentre i residui delle potenze terze sono molti di più (perché?). Questo basta per garantire che la terza affermazione è falsa (basta fare in modo che $x^3 \not\equiv \pm 1$ ed abbiamo visto che si può), mentre la quarta affermazione è vera (basta prendere $y = \pm 1$ a seconda dei casi).
- Si ha che $P(x, y) \equiv x^9 + y^{27} \pmod{31}$ (perché? cosa ho fatto agli esponenti?). Ora la potenza terza e quella 27-esima *non* sono surgettive modulo 31, ma hanno la stessa immagine, che a sua volta è invariante rispetto alla moltiplicazione per -1 (cosa vuol dire tutto ciò? perché è vero? a che serve?). Questo mostra che la quinta affermazione è vera. In alternativa, basta in realtà prendere $x = -y^{-1}$, cioè l'inverso moltiplicativo cambiato di segno (perché?).

Test Finale – Risposte

1. 17/3
2. 3/2
3. 2520
4. 2111
5. 54
6. $\sqrt{135}/16$
7. L'unico è 7744
8. I possibili valori sono 2 e 6
9. ...
10. Tutti e soli i valori dispari di n
11. ...
12. Solo $n = 4$ e $n = 5$

Test Finale – "Aiutini"

1. Dalle relazioni tra radici e coefficienti si deduce che

   $$5 = a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3 - 3(a + b + c)(ab + bc + ca) + 3abc = -8 + 6k - 21,$$

   da cui segue immediatamente la soluzione.

2. Si ha che $b_{n+1} = 2a_n + 3b_n = 4b_{n-1} + 3b_n$ (perché?). Il polinomio associato a questa ricorrenza è $x^2 - 3x - 4$, da cui (perché?) $b_n = a \cdot 4^n + b \cdot (-1)^n$ per opportuni a e b e $a_n = 2b_{n-1} = 2a \cdot 4^{n-1} + 2b \cdot (-1)^{n-1}$. Dalla limitatezza di b_n deduciamo ora che $a = 0$ (perché?), ed a questo punto dal fatto che $a_{2012} = 3$ ricaviamo che $b = -3/2$.

   La conclusione segue ora facilmente.

3. Segnaliamo 2 approcci.

   - *Simmetria.* Osserviamo che un anagramma ha la proprietà richiesta se e solo se il suo "ribaltato" (cioè quello ottenuto scrivendo le lettere al contrario, da destra verso sinistra) non ha la proprietà richiesta (occhio: questa osservazione va giustificata per bene!). Dunque gli anagrammi in questione sono metà di tutti gli anagrammi.

- *Conteggio diretto.* Vi sono 3 modi in cui le T e le I possono comparire nell'anagramma (ignorando le restanti lettere), e precisamente TTII, TITI, TIIT. Per ottenere un anagramma con le proprietà richieste dobbiamo dunque scegliere uno dei 3 modi, poi scegliere 4 caselle su 8 in cui piazzare quelle 4 lettere, quindi scegliere una posizione per la A ed una per la G. Questo porta (come?) al conteggio

$$3 \cdot \binom{8}{4} \cdot 4 \cdot 3 = 2520.$$

4. I valori di n favorevoli a Barbara sono quelli della successione definita per ricorrenza da $a_0 = 2$ e $a_{n+1} = 10a_n + 1$. Partendo da tali valori, infatti, Alberto è obbligato a lasciare una pila con un numero di monete che non appartiene alla successione, mentre Barbara, alla mossa successiva, può sempre e comunque riportare il numero di monete a far parte della successione. Perché è vero questo? A cosa serve?

   Poiché $a_1 = 21$, $a_2 = 211$, $a_3 = 2111$, quest'ultimo è il valore richiesto.

5. Dalle ipotesi fatte segue che il triangolo dato è simile al triangolo rettangolo con lati di lunghezza 3–4–5 (cosa stiamo usando?), con il lato lungo 9 che corrisponde a quello lungo 3. Pertanto il triangolo dato ha il lati di lunghezza 9–12–15, dunque area 54.

6. Segnaliamo 3 approcci.

   - *Ciclicità e Carnot.* Si ha che $AD \cdot AB = AE \cdot AC$, dunque il quadrilatero $BDEC$ è ciclico, dunque $\angle ABC = \angle AED$ (cosa abbiamo usato in questi passaggi?). Dal teorema di Carnot nel triangolo ADE abbiamo che

     $$4^2 + 2^2 - 16\cos(\angle AED) = 3^2,$$

     da cui $\cos(\angle AED) = 11/16$, dunque $\sin(\angle AED) = \sin(\angle ABC) = \sqrt{135}/16$.
   - *Simmetria e Carnot.* Sia M il punto medio di AB, e sia N il punto medio di AC. Dalle ipotesi del problema segue che DE ed MN sono simmetrici rispetto alla bisettrice dell'angolo in A (perché?). Ne segue che $BC = 2MN = 2DE = 8$. A questo punto possiamo applicare Carnot direttamente in ABC.
   - *Brute force.* Calcoliamo $\cos(\angle AED)$ applicando Carnot come nel primo approccio. Calcoliamo $\sin(\angle BAC)$ mediante il teorema dei seni nel triangolo DAE. Calcoliamo BC utilizzando il teorema di Carnot nel triangolo ABC, facendo attenzione al segno di $\cos(\angle BAC)$. Concludiamo con il teorema dei seni nel triangolo ABC.

7. Il numero è $11(100a + b)$. Essendo un quadrato perfetto, anche $100a + b$ deve essere divisibile per 11, il che accade se e solo se $a + b = 11$ (perché?). Questo lascia aperte 8 possibilità: 9922, 8833, ..., 3388, 2299. Quelli che finiscono per 2, 3, 7, 8 si scartano subito (perchè?), per quelli che finiscono per 6 o 9 basta guardare la congruenza modulo 9 (in che senso?), e anche 6655 non può essere un quadrato perché non termina con 25. Resta solo 7744, che per puro caso è 88^2.

8. Il numero deve chiaramente essere divisibile per 8. La congruenza modulo 8 dipende solo dalle ultime 3 cifre, e nel caso specifico si ha se e solo se la cifra delle decine è 2 oppure 6 (perché?). Resta da mostrare che entrambi questi finali sono realizzabili, il che è vero se mostriamo che

12 è un generatore modulo 125 (perché questo basta?). Ora 12 è un generatore modulo 5 (banale verifica: quale?), e lo è pure modulo 25 (come si verifica? quanto potrebbe essere il suo ordine?), dunque lo è anche modulo 125 (cosa stiamo usando?).

9. Basta dimostrare che LHS $\leq \sqrt{6} \leq$ RHS.

   Per la prima ci sono almeno 2 possibilità:

   - utilizzare il vincolo e ridursi (come?) a dimostrare che
     $$\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a} \leq \sqrt{3}\sqrt{2(a+b+c)},$$
     la quale segue facilmente (come?) sia da Cauchy-Schwarz, sia da AM–QM;
   - sfruttare (come?) la concavità della funzione $f(x)=\sqrt{1-x}$ (perché è concava?).

   La seconda è equivalente a
   $$\sqrt{ab+bc+ca}+2\sqrt{a^2+b^2+c^2} \geq \sqrt{3}(a+b+c),$$
   la quale si dimostra facilmente elevando al quadrato e poi usando le solite cose (quali? come?).

10. Per n pari non ce la si fa nemmeno con le 2-inversioni se nella configurazione iniziale il numero di punti di entrambi i colori è dispari (perché? quale invariante c'è sotto?).

    Per n dispari si tratta di esibire un algoritmo. Segnaliamo 2 possibilità.

    - Mostriamo che, dati 2 punti qualunque x e y, è sempre possibile invertire il colore di ciascuno di questi 2 punti, lasciando inalterati gli altri (perché questo basta?). A tal fine scegliamo a caso $(k-1)$ punti diversi da x e y e poi eseguiamo una k-inversione su x ed i $(k-1)$ punti, seguita da una k-inversione su y ed i $(k-1)$ punti. Cosa accade ai colori? Abbiamo usato che $k < n/2$?
    - Sia $2b$ il numero di punti bianchi nella configurazione iniziale (ma perché stiamo supponendo che sia pari?). Sia r il resto della divisione euclidea tra b e k. Mediante una sequenza di k-inversioni, possiamo arrivare ad avere esattamente r punti bianchi (come facciamo?). Ora bisogna distinguere 2 casi.
      - Se k è pari, anche il resto è pari (perché?). Possiamo allora con una k-inversione (fatta come?) riducrci ad avere esattamente k punti bianchi, al che si chiude facilmente.
      - Se k è dispari ed il resto è pari operiamo come nel caso precedente. Se k è dispari ma il resto è dispari, allora con una k-inversione (fatta come?) possiamo arrivare ad avere esattamente $k-r$ punti bianchi. Essendo questo un numero pari, ci siamo ricondotti al caso precedete.

      Abbiamo usato che $k < n/2$?

11. Basta dimostrare che, per esempio, $BEFC$ è ciclico (perché basta?).

    Per dimostrare tale ciclicità basta dimostrare, per esempio, che $\angle IEF = \gamma/2$ (perché basta?).

    Questa uguaglianza a sua volta segue da un conto di angoli: si tratta di sfruttare che AI è perpendicolare ad EF, quindi calcolare l'angolo tra le rette EF ed AB, quindi ...

12. La congruenza modulo 9 basta per escludere che ci siano soluzioni con $n \geq 6$ (cosa ha di speciale il 9 per questo problema? quale modulo si poteva usare quasi altrettanto bene?).

    Per $n = 5$ ed $n = 4$ si esibiscono facilmente delle soluzioni (farlo!).

    Per $n = 3$, $n = 2$, $n = 1$ si può mostrare che non esistono soluzioni in almeno due modi:

    - usando opportune congruenze modulo 7 e/o 9 (come?),
    - usando che non sono molti i cubi che differiscono di così poco (cosa c'entrano le differenze? come si formalizza il discorso?).