Algebra – Problemi di ammissione

A1. Siano a, b e c reali positivi tali che $a^2 + b^2 + c^2 = a^3 + b^3 + c^3$. Dimostrare che vale:

$$\frac{a}{a^2 + b^4 + c^4} + \frac{b}{a^4 + b^2 + c^4} + \frac{c}{a^4 + b^4 + c^2} \geq 1$$

A2. Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$(x + y)(f(x) - f(y)) = (x - y)f(x + y)$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

A3. Dato il polinomio $p(x) = x^2+4x-4$, consideriamo la successione definita per ricorrenza, $a(1) = 1$ e

$$a(n) = \sum_{k=1}^{n-1} p(n - k)a(k), \qquad n \geq 2$$

Si determini il più piccolo $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $a(n) \leq 2015\alpha^n$ per ogni $n \geq 1$.

Algebra – Sessioni dello stage

A4. Dimostrare che per tutte le terne positive a, b, c che soddisfano $abc = 1$, si ha,

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{a(a+1) + ab(ab+1)} \geq \frac{3}{4}.$$

A5. Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che, per ogni $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(xf(y)) + y + f(x) = f(x + f(y)) + yf(x).$$

A6. Dimostrare che per ogni scelta di a, b, c, d non negativi si ha

$$(ab)^{\frac{1}{3}} + (cd)^{\frac{1}{3}} \leq [(a+c+b)(a+c+d)]^{\frac{1}{3}}.$$

A7. Sia $n \geq 2$ un numero intero, e siano $a_1, \ldots, a_{n-1}$ numeri reali qualunque. Siano $(u_0, u_1, \ldots, u_n)$ e $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ due $(n+1)$-uple tali che

- $u_0 = u_1 = v_0 = v_1 = 1$,
- $u_{k+1} = u_k + a_k u_{k-1}$ per ogni $k = 1, \ldots, n-1$,
- $v_{k+1} = v_k + a_{n-k} v_{k-1}$ per ogni $k = 1, \ldots, n-1$.

Dimostrare che $u_n = v_n$.

A8. Dimostrare che, per ogni intero positivo n, il polinomio

$$p(x) = (x^2 - 8x + 25)(x^2 - 16x + 100) \cdot \ldots \cdot (x^2 - 8nx + 25n^2) + 1$$

è irriducibile in $\mathbb{Z}[x]$.

A9. Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$f(x+y) + y \leq f(f(f(x)))$$

per ogni coppia di numeri reali x e y.

Combinatoria – Problemi di ammissione

C1. In una scacchiera $n \times n$ sono poste k tessere a forma di L (coprenti cioè ciascuna tre caselle non allineate di cui una ha un lato in comune con ciascuna delle altre due), in modo che non siano mai sovrapposte e che per ogni coppia di righe a, b e ogni coppia di colonne s, t almeno una tra le quattro caselle agli incroci $((a, s), (a, t), (b, s), (b, t))$ *non* sia coperta da una tessera. Quali valori può assumere k?

C2. Sono dati 17 insiemi di 5 elementi, $A_1, \ldots, A_{17}$ tali che per ogni coppia di insiemi distinti l'intersezione ha esattamente 2 elementi. Dimostrare che tutti gli insiemi si intersecano negli stessi 2 elementi.

C3. Il reticolo di strade tra n città gode di queste proprietà: due città o sono collegate da una strada, o non sono collegate affatto (se non eventualmente passando da altre città); inoltre, comunque si scelgano $n - 2$ città, il numero totale M di strade tra di esse è lo stesso. Trovare quali sono i possibili valori per il numero totale di strade N.

Combinatoria – Sessioni dello stage

C4. In ogni casella di una scacchiera 2014×2014 è seduta una persona che è o un cavaliere o un furfante.
Come è noto i cavalieri affermano sempre il vero, mentre i furfanti mentono sempre.
Ogni persona viene interrogata e dichiara la seguente frase: "I furfanti presenti nella mia riga sono tanti quanti i furfanti presenti nella mia colonna".
Determinare il minimo numero possibile di cavalieri presenti nella scacchiera.

C5. Sono date $2n$ pedine in fila. Una mossa consiste nello scambiare 2 pedine adiacenti. L'obiettivo è dare una successione di K mosse che permetta ad ogni pedina di trovarsi almeno una volta a capo e almeno una volta a coda della fila. Quanto vale K al minimo, per raggiungere l'obiettivo?

C6. Determinare il massimo intero r tale che comunque siano dati 5 sottoinsiemi $A_1, \ldots, A_5$ di $\{1, \ldots, 1000\}$ ciascuno contenente 500 elementi, esistano necessariamente due indici i, j distinti tali che $|A_i \cap A_j| \geq r$.

Geometria – Problemi di ammissione

G1. In un triangolo $\triangle ABC$, sia M il punto medio di AC, e D un punto su BC tale che $DB = DM$. Sappiamo che $2BC^2 = AC(AC + AB)$.

Dimostrare che i triangoli $\triangle ABC$ e $\triangle DMC$ sono simili.

G2. Sia ABC un triangolo rettangolo in C; scegliamo un punto P sull'arco AC della circonferenza circoscritta che non contiene B. La retta perpendicolare a CP e passante per C incontra AP e BP in K e L rispettivamente. Dimostrare che il rapporto tra le aree di BKL e ACP non dipende da P.

G3. Sia ABC un triangolo e sia Γ la sua circonferenza circoscritta. Sia γ una circonferenza con corda BC. Tale circonferenza interseca i segmenti AC e AB di nuovo in Y e Z, rispettivamente. Definiamo P come il punto di intersezione dei segmenti BY e CZ. Definiamo inoltre E e F come i punti di intersezione di BY e CZ con Γ, rispettivamente. La bisettrice interna dell'angolo $\angle BEF$ interseca la retta FY nel punto K. Dimostrare che se $BF = BY$, allora $\angle FPK = \frac{1}{2}\angle BCE$.

Geometria – Sessioni dello stage

G4. I quadrati $CAKL$ e $CBMN$ sono costruiti sui lati di un triangolo acutangolo ABC, all'esterno del triangolo. La retta CN interseca il segmento AK in X; la retta CL interseca il segmento BM in Y. Il punto P, interno al triangolo ABC, è una intersezione delle circonferenze circoscritte ai triangoli KXN e LYM. Il punto S è il punto medio di AB. Il punto Q è l'intersezione delle rette KL e MN.

(a) Dimostrare che P, C e Q sono allineati.

(b) Dimostrare che $\angle ACS = \angle BCP$.

G5. Sia ABC un triangolo, e sia D un punto sul lato BC. Il circocerchio di ABD interseca AC in F (diverso da A), e il circocerchio di ACD interseca AB in E (diverso da A).

Dimostrare che, al variare di D, il circocerchio di AEF passa sempre per un punto fisso diverso da A, e che tale punto si trova sulla mediana di ABC uscente da A.

G6. Sia ABC un triangolo con incentro I. Sia ω il suo incerchio. Sia Γ la circonferenza circoscritta al triangolo BIC. Le circonferenze ω e Γ si intersecano nei punti X e Y. Siano Z e Z' i due centri di similitudine delle circonferenze ω e Γ.

(a) Dimostrare che $XZYZ'$ è ciclico.

(b) Dimostrare che la sua circonferenza circoscritta a $XZYZ'$ è tangente al circocerchio di ABC.

G7. Sia ABC un triangolo con circocerchio Γ. Siano M, N i punti medi degli archi AB, AC che non contengono C, B. Siano M', N' i punti di tangenza dell'incerchio di ABC con AB, AC. Supponiamo che X, Y siano i piedi delle perpendicolari da A a MM', NN'. Sia infine I l'incentro di ABC.

Dimostrare che il quadrilatero $AXIY$ è ciclico se e solo se $b + c = 2a$.

G8. Sia ABC un triangolo, H il suo ortocentro e K il suo punto di Lemoine. Indichiamo inoltre con K' il punto di Lemoine del triangolo ortico di ABC.

Dimostrare che H, K e K' sono allineati.

(NOTA: si ricorda che il triangolo ortico di XYZ è il triangolo che ha come vertici i piedi delle altezze di XYZ, e che il punto di Lemoine di XYZ è il punto di concorrenza delle simmediane di XYZ.)

G9. Sia $ABCDEF$ un esagono convesso con $AB = DE$, $BC = EF$ e $CD = FA$. Supponiamo inoltre che $\angle A - \angle D = \angle C - \angle F = \angle E - \angle B$.

Dimostrare che le diagonali AD, BE e CF sono concorrenti.

Teoria dei numeri – Problemi di ammissione

N1. Determinare tutte le quadruple di interi non negativi (a, b, c, d) tali che

$$11^a \cdot 5^b - 3^c \cdot 2^d = 1.$$

N2. Siano m ed n interi positivi tali che $(2m + 1, 2n + 1) = 1$.

Dimostrare che

$$(2^{2m+1} + 2^{m+1} + 1, 2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1) \in \{1, 5\}.$$

N3. Determinare tutte le coppie (p, n), dove p è un numero primo ed n un intero positivo, tali che

$$p^5 + 4p + 1 = n^2.$$

Teoria dei numeri – Sessioni dello stage

N4. Determinare tutti gli interi positivi k tali che il prodotto dei primi k numeri primi dispari è della forma $a^b + 1$ con $a \geq 1$ e $b \geq 2$.

N5. Siano a, b due interi relativamente primi, e definiamo le successioni di interi $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ mediante la formula

$$(a + b\sqrt{2})^{2n} = a_n + b_n\sqrt{2}.$$

Determinare l'insieme dei numeri primi p per i quali esiste un intero positivo $n \leq p$ tale che $p | b_n$.

N6. Determinare tutte le coppie di interi positivi (m, n) tali che $m^6 = n^{n+1} + n - 1$.

N7. Determinare tutti gli interi positivi n per i quali ogni coefficiente del polinomio

$$P_n(x) = (x^2 + x + 1)^n - (x^2 + x)^n - (x^2 + 1)^n - (x + 1)^n + x^{2n} + x^n + 1$$

è divisibile per 7.

Girls Selection Test

GST1. Per ogni $k = 1, 2, \ldots, 2014$ poniamo

$$S_k = \sum_{i=k}^{2014} \frac{1}{i} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \ldots + \frac{1}{2014}.$$

Calcolare

$$S_1 + \sum_{k=1}^{2014} S_k^2 = S_1 + S_1^2 + S_2^2 + \ldots + S_{2014}^2.$$

GST2.

(a) Determinare se è possibile partizionare l'insieme degli interi positivi come unione disgiunta di insiemi A_1, A_2, $\ldots$, A_n, $\ldots$, dove ogni A_i è costituito da 2 elementi la cui somma è $2014 + i$.

(b) Determinare se è possibile partizionare l'insieme degli interi positivi come unione disgiunta di insiemi A_1, A_2, $\ldots$, A_n, $\ldots$, dove ogni A_i è costituito da 2 elementi la cui somma è $2014 + i^2$.

GST3. Due circonferenze Γ_a e Γ_b, di raggio diverso, si intersecano in due punti M ed N. Una retta t è tangente a Γ_a nel punto A e a Γ_b nel punto B. La perpendicolare a t passante per A interseca MN in C. La perpendicolare a t passante per B interseca MN in D.

(a) Dimostrare che il quadrilatero $ACBD$ è un parallelogrammo.

(b) Sia E l'ulteriore intersezione tra CA e Γ_a, sia F l'ulteriore intersezione tra CB e Γ_b, sia X l'ulteriore intersezione tra DA e Γ_a, e sia Y l'ulteriore intersezione tra DB e Γ_b.

Dimostrare che i punti E, F, X, Y sono allineati.

GST4. Determinare tutte le terne (p, n, a) in cui p è un numero primo, n ed a sono interi positivi e

$$(2p)^n + 1 = a^3.$$

Modalità di svolgimento della prova: una giornata di gara con 4 problemi e 4 ore e 30 minuti di tempo a disposizione.

Team(s) Selection Test

A1. Sia $\mathbb{Z}_{>0}$ l'insieme degli interi positivi.

Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ tali che

$$[m^2 + f(n)] \quad \text{divide} \quad [mf(m) + n]$$

per ogni coppia di interi positivi m ed n.

A2. Sia ABC un triangolo, e sia ω la sua circonferenza circoscritta. Siano M il punto medio di AB, N il punto medio di AC, T il punto medio dell'arco BC di ω che non contiene A. La circonferenza circoscritta al triangolo AMT interseca l'asse di AC in un punto X interno al triangolo ABC. La circonferenza circoscritta al triangolo ANT interseca l'asse di AB in un punto Y interno al triangolo ABC. Le rette MN e XY si intersecano in K.

Dimostrare che $KA = KT$.

A3. Sia S un insieme di 2000 numeri reali distinti.

Dimostrare che esistono due coppie distinte $(a, b) \in S^2$ e $(c, d) \in S^2$ tali che $a > b$, $c > d$, e

$$\left| \frac{a-b}{c-d} - 1 \right| < \frac{1}{100000}.$$

Nota. Le due coppie possono anche avere un elemento in comune, nel senso che per esempio può accadere che $a = c$ (ma in tal caso necessariamente si deve avere che $b \neq d$).

B1. Per ogni intero positivo n, determinare il più piccolo intero positivo $k(n)$ con questa proprietà.

> Per ogni intero positivo d e per ogni d-upla di numeri reali $(a_1, \ldots, a_d) \in [0, 1]^d$ tali $a_1 + \ldots + a_d = n$, è possibile suddividere i d elementi in $k(n)$ gruppi in maniera tale che la somma dei numeri appartenenti ad ogni gruppo sia sempre minore od uguale ad 1.

Nota. Quando si suddividono i d numeri si intende che ogni numero va a finire in uno ed un solo gruppo. Eventuali numeri ripetuti nella d-upla possono finire in gruppi diversi. Alcuni gruppi possono anche rimanere vuoti, ed in tal caso la loro somma si intende nulla.

B2.

(a) Dimostrare che non esistono terne (p, q, n) in cui p e q sono primi distinti ed n è un intero positivo tale che
$$p^{q-1} - q^{p-1} = 4n^2.$$

(b) Dimostrare che non esistono terne (p, q, n) in cui p e q sono primi distinti ed n è un intero positivo tale che
$$p^{q-1} - q^{p-1} = 4n^3.$$

B3. Sia ABC un triangolo scaleno acutangolo con $CB < CA$, sia D il piede dell'altezza uscente da C, e sia E un punto sull'altezza CD. La circonferenza di diametro CE interseca la circonferenza circoscritta ad ABC in K (oltre che in C), il lato CA in L, e il lato CB in M. Sia N l'intersezione tra le rette KE e AB.

Dimostrare che il quadrilatero $DNML$ è ciclico.

Modalità di svolgimento della prova: 3 problemi al giorno con 4 ore e 30 minuti di tempo a disposizione.

Risposte

A1.

A2. $f(x) = ax^2 + bx$

A3. $\frac{5+\sqrt{13}}{2}$

A4.

A5. $f(x) = x$

A6.

A7.

A8. Conviene pensare al caso totalmente reale

$$p(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4) \cdot \ldots \cdot (x^2 - n^2) + 1.$$

A9.

C1.

C2.

C3.

C4.

C5.

C6.

G1.

G2.

G3.

G4.

G5.

G6.

G7.

G8.

G9.

N1.

N2.

N3.

N4.

N5.

N6.

N7.

GST1.

GST2.

GST3.

GST4.

TST1.

TST2.

TST3.

TST4.

TST5.

TST6.

“Aiutini”

A1.

A2.

A3.

A4. È essenziale la sostituzione $a = \frac{x}{y}$ e cicliche, poi viene più o meno in tutti i modi.

A5. 1) $x \leftarrow 0$ dice che $f(0) = 1$ oppure $f(f(y))$ è una retta; 2) $f(0) = 0$, quindi $f(f(y)) = y$; 3) $f(xy) + f(x) + f(y) = f(x + y) + f(x)f(y)$ e da qui sostituire con insistenza fino a Cauchy; 4) da $f(y^2) = f(y)^2$, $f(x) \geq 0$ per $x \geq 0$

A6. Hölder a tre: $\sum_i a_i b_i c_i \leq \sqrt[3]{\sum a_i^3}\sqrt[3]{\sum b_i^3}\sqrt[3]{\sum c_i^3}$ sugli oggetti giusti. Oppure dividere LHS per il RHS e stimare ciascuno dei due addendi con AM-GM.

A7.

A8.

A9.

C1.

C2.

C3.

C4.

C5.

C6.

G1.

G2.

G3.

G4.

G5.

G6.

G7.

G8.

G9.

N1.

N2.

N3.

N4. Escludere che b sia potenza di 2. Ridursi al caso in cui b è primo. Stimare la grandezza di b.

N5.

N6. Considerare congruenze con primi piccoli. Inoltre, congruenza modulo $n+1$. Fattorizzare il termine a destra.

N7. Ricordare Fermat. Considerare possibili somme di potenze di 7.

GST1.

GST2.

GST3.

GST4.

TST1.

TST2.

TST3.

TST4.

TST5.

TST6.

Last but not least

Questi problemi sono il risultato di una selezione operata a partire da oltre 200 problemi, scelti facendo in modo da rappresentare un ampio spettro di tecniche riciclabili altrove. Solo lavorando su questi problemi prima autonomamente e poi seguendo *tutti* gli approcci suggeriti si potrà averne veramente giovamento (e dunque sarà servito a qualcosa il lavoro di tutti coloro che hanno collaborato alla loro selezione).

Parte I

Presentazioni generali problemi

Presentazione globale del problema A1

Testo Siano a, b e c reali positivi tali che $a^2 + b^2 + c^2 = a^3 + b^3 + c^3$. Dimostrare che vale:

$$\frac{a}{a^2 + b^4 + c^4} + \frac{b}{a^4 + b^2 + c^4} + \frac{c}{a^4 + b^4 + c^2} \geq 1$$

Provenienza Turkey Junior MO 2012 modificato

Link `http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?p=2875068`

Difficoltà e/o possibile utilizzo

Commenti

Risposta

Aiutino

Soluzione

Presentazione globale del problema A2

Testo Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$(x + y)(f(x) - f(y)) = (x - y)f(x + y)$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

Provenienza Singapore IMO TST 2008

Link `http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?p=2861814`

Difficoltà e/o possibile utilizzo

Commenti

Risposta $f(x) = ax^2 + bx$

Aiutino

Soluzione

Presentazione globale del problema A3

Testo Dato il polinomio $p(x) = x^2 + 4x - 4$, consideriamo la successione definita per ricorrenza, $a(1) = 1$ e

$$a(n) = \sum_{k=1}^{n-1} p(n-k)a(k), \qquad n \geq 2$$

Si determini il più piccolo $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $a(n) \leq 2015\alpha^n$ per ogni $n \geq 1$.

Provenienza Mathlinks 2013, modificato

Link `http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?t=543263`

Difficoltà e/o possibile utilizzo

Commenti

Risposta $\frac{5+\sqrt{13}}{2}$

Aiutino

Soluzione

Presentazione globale del problema A4

Testo Dimostrare che per tutte le terne positive a, b, c che soddisfano $abc = 1$, si ha,

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{a(a+1) + ab(ab+1)} \geq \frac{3}{4}.$$

Provenienza

Link `http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?p=2558792`

Difficoltà e/o possibile utilizzo preIMO 4 o 5-6, WC 1-3 o 4

Commenti

Risposta

Aiutino È essenziale la sostituzione $a = \frac{x}{y}$ e cicliche, poi viene più o meno in tutti i modi.

Soluzione Per chiudere, rispetto a quella su Mathlinks, forse è più naturale $\sum \frac{2p}{2p+3q+3r} = \sum \frac{2p^2}{2p^2+3pq+3pr}$ e poi Lemma di Titu.

Presentazione globale del problema A5

Testo Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che, per ogni $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(xf(y)) + y + f(x) = f(x + f(y)) + yf(x).$$

Provenienza Iran TST 2008

Link `http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?p=1132691`

Difficoltà e/o possibile utilizzo preIMO 7-8, WC 5-6

Commenti

Risposta $f(x) = x$

Aiutino 1) $x \leftarrow 0$ dice che $f(0) = 1$ oppure $f(f(y))$ è una retta; 2) $f(0) = 0$, quindi $f(f(y)) = y$; 3) $f(xy) + f(x) + f(y) = f(x + y) + f(x)f(y)$ e da qui sostituire con insistenza fino a Cauchy; 4) da $f(y^2) = f(y)^2$, $f(x) \geq 0$ per $x \geq 0$

Soluzione

Presentazione globale del problema A6

Testo Dimostrare che per ogni scelta di a, b, c, d non negativi si ha

$$(ab)^{\frac{1}{3}} + (cd)^{\frac{1}{3}} \leq [(a+c+b)(a+c+d)]^{\frac{1}{3}}.$$

Provenienza Saint Petersburg Lyceum 239 Olympiad, probabilmente 2003 o 2004

Link `http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?t=3296`

Difficoltà e/o possibile utilizzo WC 6, IMO 3

Commenti famoso esempio di quasilinearization; già dato al preIMO 2009

Risposta

Aiutino Hölder a tre: $\sum_i a_i b_i c_i \leq \sqrt[3]{\sum a_i^3}\sqrt[3]{\sum b_i^3}\sqrt[3]{\sum c_i^3}$ sugli oggetti giusti. Oppure dividere LHS per il RHS e stimare ciascuno dei due addendi con AM-GM.

Soluzione

Presentazione globale del problema A7

Testo Sia $n \geq 2$ un numero intero, e siano $a_1, \ldots, a_{n-1}$ numeri reali qualunque. Siano $(u_0, u_1, \ldots, u_n)$ e $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ due $(n+1)$-uple tali che

- $u_0 = u_1 = v_0 = v_1 = 1$,
- $u_{k+1} = u_k + a_k u_{k-1}$ per ogni $k = 1, \ldots, n-1$,
- $v_{k+1} = v_k + a_{n-k} v_{k-1}$ per ogni $k = 1, \ldots, n-1$.

Dimostrare che $u_n = v_n$.

Provenienza IMO–SL 2013, problema A1

Link

Difficoltà e/o possibile utilizzo

Commenti

Risposta

Aiutino

Soluzione

Presentazione globale del problema A8

Testo Dimostrare che, per ogni intero positivo n, il polinomio

$$p(x) = (x^2 - 8x + 25)(x^2 - 16x + 100) \cdot \ldots \cdot (x^2 - 8nx + 25n^2) + 1$$

è irriducibile in $\mathbb{Z}[x]$.

Provenienza BMO–SL 2013, problema A3 (scartato in quanto qualcuno lo ha definito "noto").

Link

Difficoltà e/o possibile utilizzo Solito problema di irriducibilità che si basa sulle solite 2 idee: sfruttare l'1 isolato che pone vincoli di fattorizzazione e pensare alle radici complesse. Si scopre che i due fattori dovrebbero coincidere, quindi $p(x)$ dovrebbe essere un quadrato.

Commenti

Risposta Conviene pensare al caso totalmente reale

$$p(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4) \cdot \ldots \cdot (x^2 - n^2) + 1.$$

Aiutino

Soluzione

Presentazione globale del problema A9

Testo Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$f(x + y) + y \leq f(f(f(x)))$$

per ogni coppia di numeri reali x e y.

Provenienza BLR-TST 2013-1.2

Link

Difficoltà e/o possibile utilizzo Questo esercizio è l'abc delle disuguaglianze funzionali: con sostituzioni sagge si ottiene il conflitto tra 2 opposte tendenze, per cui da disuguaglianze diventano uguaglianze.

Commenti Solo quelle affini del tipo $f(x) = a - x$.

Risposta

Aiutino

Soluzione

Presentazione globale del problema C1

Testo In una scacchiera $n \times n$ sono poste k tessere a forma di L (coprenti cioè ciascuna tre caselle non allineate di cui una ha un lato in comune con ciascuna delle altre due), in modo che non siano mai sovrapposte e che per ogni coppia di righe a, b e ogni coppia di colonne s, t almeno una tra le quattro caselle agli incroci $((a, s), (a, t), (b, s), (b, t))$ *non* sia coperta da una tessera. Quali valori può assumere k?

Provenienza ARG 2013

Link

Difficoltà e/o possibile utilizzo non difficile

Commenti Considerare coppie di righe e colonne per dimostrare $k \leq n - 1$, poi è una costruzione. Da booklet

Risposta

Aiutino

Soluzione

Presentazione globale del problema C2

Testo Sono dati 17 insiemi di 5 elementi, $A_1, \ldots, A_{17}$ tali che per ogni coppia di insiemi distinti l'intersezione ha esattamente 2 elementi. Dimostrare che tutti gli insiemi si intersecano negli stessi 2 elementi.

Provenienza BLR 2013 Test 2 generalizzato

Link

Difficoltà e/o possibile utilizzo non difficile

Commenti Principio dei cassetti e osservazioni. Vero con 12!

Risposta

Aiutino

Soluzione

Presentazione globale del problema C3

Testo Il reticolo di strade tra n città gode di queste proprietà: due città o sono collegate da una strada, o non sono collegate affatto (se non eventualmente passando da altre città); inoltre, comunque si scelgano $n-2$ città, il numero totale M di strade tra di esse è lo stesso. Trovare quali sono i possibili valori per il numero totale di strade N.

Provenienza IRL 2013 33 generalizzato

Link

Difficoltà e/o possibile utilizzo normale per l'ammissione

Commenti Tranne casi piccoli, deve essere un grafo regolare; e allora deve essere di grado $n-1$

Risposta

Aiutino

Soluzione

Presentazione globale del problema C4

Testo In ogni casella di una scacchiera 2014×2014 è seduta una persona che è o un cavaliere o un furfante.
Come è noto i cavalieri affermano sempre il vero, mentre i furfanti mentono sempre. Ogni persona viene interrogata e dichiara la seguente frase: "I furfanti presenti nella mia riga sono tanti quanti i furfanti presenti nella mia colonna".
Determinare il minimo numero possibile di cavalieri presenti nella scacchiera.

Provenienza Argentina, nazionali 2012 3.6

Link

Difficoltà e/o possibile utilizzo medio

Commenti

Risposta

Aiutino

Soluzione

Presentazione globale del problema C5

Testo Sono date $2n$ pedine in fila. Una mossa consiste nello scambiare 2 pedine adiacenti. L'obiettivo è dare una successione di K mosse che permetta ad ogni pedina di trovarsi almeno una volta a capo e almeno una volta a coda della fila. Quanto vale K al minimo, per raggiungere l'obiettivo?

Provenienza Argentina, nazionali 2012 2.6

Link

Difficoltà e/o possibile utilizzo medio/difficile

Commenti

Risposta

Aiutino

Soluzione

Presentazione globale del problema C6

Testo Determinare il massimo intero r tale che comunque siano dati 5 sottoinsiemi $A_1, \ldots, A_5$ di $\{1, \ldots, 1000\}$ ciascuno contenente 500 elementi, esistano necessariamente due indici i, j distinti tali che $|A_i \cap A_j| \geq r$.

Provenienza Romania, TST 3.11

Link

Difficoltà e/o possibile utilizzo medio/difficile

Commenti

Risposta

Aiutino

Soluzione

Presentazione globale del problema G1

Testo In un triangolo $\triangle ABC$, sia M il punto medio di AC, e D un punto su BC tale che $DB = DM$. Sappiamo che $2BC^2 = AC(AC + AB)$.

Dimostrare che i triangoli $\triangle ABC$ e $\triangle DMC$ sono simili.

Provenienza [Fabio] Preimo prima mattinata

Link [Fabio] Costruzione carina, ma non astrusa

Difficoltà e/o possibile utilizzo Iran TST 2007 Day 1 (leggermente modificato)

Commenti

Risposta

Aiutino

Soluzione

Presentazione globale del problema G2

Testo Sia ABC un triangolo rettangolo in C; scegliamo un punto P sull'arco AC della circonferenza circoscritta che non contiene B. La retta perpendicolare a CP e passante per C incontra AP e BP in K e L rispettivamente. Dimostrare che il rapporto tra le aree di BKL e ACP non dipende da P.

Provenienza [Sam]Facilino

Link [Sam]Triangoli simili a gogò.

Difficoltà e/o possibile utilizzo Czech-Polish-Slovak 2012

Commenti

Risposta

Aiutino

Soluzione

Presentazione globale del problema G3

Testo Sia ABC un triangolo e sia Γ la sua circonferenza circoscritta. Sia γ una circonferenza con corda BC. Tale circonferenza interseca i segmenti AC e AB di nuovo in Y e Z, rispettivamente. Definiamo P come il punto di intersezione dei segmenti BY e CZ. Definiamo inoltre E e F come i punti di intersezione di BY e CZ con Γ, rispettivamente. La bisettrice interna dell'angolo $\angle BEF$ interseca la retta FY nel punto K. Dimostrare che se $BF = BY$, allora $\angle FPK = \frac{1}{2}\angle BCE$.

Provenienza [Fabio] Ammissione WC

Link [Fabio] Angle chasing carino

Difficoltà e/o possibile utilizzo ELMO Shortlist 2013

Commenti

Risposta

Aiutino

Soluzione

Presentazione globale del problema G4

Testo I quadrati $CAKL$ e $CBMN$ sono costruiti sui lati di un triangolo acutangolo ABC, all'esterno del triangolo. La retta CN interseca il segmento AK in X; la retta CL interseca il segmento BM in Y. Il punto P, interno al triangolo ABC, è una intersezione delle circonferenze circoscritte ai triangoli KXN e LYM. Il punto S è il punto medio di AB. Il punto Q è l'intersezione delle rette KL e MN.

1. Dimostrare che P, C e Q sono allineati.
2. Dimostrare che $\angle ACS = \angle BCP$.

Provenienza [Maria] Preimo pomeriggio [Fabio] WC1/2

Link [Maria] Simmediana e assi radicali

Difficoltà e/o possibile utilizzo AllRussianMO 2013, 9th grade, p7

Commenti Chiamo Q l'intersezione di KL e MN e osservo che Q sta su entrambe le circonferenze disegnate in precedenza. Osservo che C ha la stessa potenza rispetto a queste due circonferenze. A questo punto so che P, C e Q sono allineati, e mi basta dimostrare che Q si trova sulla simmediana, e lo faccio guardando le sue distanze da AC e BC.

Risposta

Aiutino

Soluzione

Presentazione globale del problema G5

Testo Sia ABC un triangolo, e sia D un punto sul lato BC. Il circocerchio di ABD interseca AC in F (diverso da A), e il circocerchio di ACD interseca AB in E (diverso da A).

Dimostrare che, al variare di D, il circocerchio di AEF passa sempre per un punto fisso diverso da A, e che tale punto si trova sulla mediana di ABC uscente da A.

Provenienza [Fabio] WC2

Link [Fabio] Quadrilateri ciclici, triangoli simili, spiral similarity

Difficoltà e/o possibile utilizzo ELMO Shortlist 2013

Commenti Sia H l'ortocentro di ABC e sia $P = CE \cap BF$; $AEPF$ e $BHPC$ sono ciclici; prese le due circonferenze ad essi circoscritte, sia Q la loro seconda intersezione oltre a P; ci basta dimostrare che Q sta sulla mediana; e questo si dimostra passando per la similitudine dei triangoli BQC e EQF.

Risposta

Aiutino

Soluzione

Presentazione globale del problema G6

Testo Sia ABC un triangolo con incentro I. Sia ω il suo incerchio. Sia Γ la circonferenza circoscritta al triangolo BIC. Le circonferenze ω e Γ si intersecano nei punti X e Y. Siano Z e Z' i due centri di similitudine delle circonferenze ω e Γ.

1. Dimostrare che $XZYZ'$ è ciclico.
2. Dimostrare che la sua circonferenza circoscritta a $XZYZ'$ è tangente al circocerchio di ABC.

Provenienza [Maria] Non ho provato a risolverlo ma mi sembra un bel problema [Fabio] WC2/3

Link [Fabio] Inversione, centri di similitudine

Difficoltà e/o possibile utilizzo AllRussianMO - 2013, Grade 11, day2, p:4

Commenti Il fatto che $XZYZ'$ sia ciclico vale in generale ogni volta che ho i due punti di intersezione e i due centri di similitudine di due circonferenze (Apollonio). Γ ha centro in M punto medio dell'arco BC. A questo punto noto che Z e Z' sono gli inversi dei punti di intersezione tra ω e AI rispetto alla circonferenza Γ (si fanno i conti sfruttando che il centro di ω si trova sulla circonferenza di inversione). Quindi la circonferenza circoscritta a $XZYZ'$ e' esattamente l'inversa di ω sotto l'inversione rispetto a Γ. Ma dato che ω e' tangente a BC, la sua inversa e' tangente a circocerchio di ABC, ovvero la tesi.

Risposta

Aiutino

Soluzione

Presentazione globale del problema G7

Testo Sia ABC un triangolo con circocerchio Γ. Siano M, N i punti medi degli archi AB, AC che non contengono C, B. Siano M', N' i punti di tangenza dell'incerchio di ABC con AB, AC. Supponiamo che X, Y siano i piedi delle perpendicolari da A a MM', NN'. Sia infine I l'incentro di ABC.

Dimostrare che il quadrilatero $AXIY$ è ciclico se e solo se $b + c = 2a$.

Provenienza [Maria] Preimo primo pomeriggio [Fabio] WC1 sessione contosa

Link [Maria] Incentro, ciclicita', centri di similitudine tra circonferenze...

Difficoltà e/o possibile utilizzo Iran Third Round 2013 - Geometry Exam - Problem 2

Commenti Chiamiamo $P = MM' \cap NN'$. Chiaramente $AXPY$ e' ciclico con diametro AP. La ciclicita' di $AXIY$ equivale quindi a $PI \perp AI$. Abbiamo pero' anche che $MN \parallel M'N'$, e quindi che P e' un centro di similitudine tra incerchio e circocerchio. Quindi ci basta dimostrare che $IO \perp AI$ se e solo se $b + c = 2a$, e questo si puo' fare banalmente ad esempio con i vettori.

Risposta

Aiutino

Soluzione

Presentazione globale del problema G8

Testo Sia ABC un triangolo, H il suo ortocentro e K il suo punto di Lemoine. Indichiamo inoltre con K' il punto di Lemoine del triangolo ortico di ABC.

Dimostrare che H, K e K' sono allineati.

(NOTA: si ricorda che il triangolo ortico di XYZ è il triangolo che ha come vertici i piedi delle altezze di XYZ, e che il punto di Lemoine di XYZ è il punto di concorrenza delle simmediane di XYZ.)

Provenienza [Fabio] WC2 sessione contosa

Link [Fabio] Baricentriche ma con un minimo di ragionamento.

Difficoltà e/o possibile utilizzo Mathlinks (trovate il link sul file .tex)

Commenti Calcolo le baricentriche dei punti rispetto al triangolo ortico. H e' l'incentro del triangolo ortico, K' e' il punto di Lemoine del triangolo ortico, e fin qui non ci sono problemi. Per calcolare K, devo osservare che le simmediane di ABC sono quelle rette che passano per gli excentri del triangolo ortico e per i punti medi dei lati del triangolo ortico stesso. A questo punto mi riesco a calcolare anche K, e sono a posto.

Risposta

Aiutino

Soluzione

Presentazione globale del problema G9

Testo Sia $ABCDEF$ un esagono convesso con $AB = DE$, $BC = EF$ e $CD = FA$. Supponiamo inoltre che $\angle A - \angle D = \angle C - \angle F = \angle E - \angle B$.

Dimostrare che le diagonali AD, BE e CF sono concorrenti.

Provenienza [Fabio] WC3 sessione contosa

Link [Fabio] Vettori e/o complessi

Difficoltà e/o possibile utilizzo SL13-5

Commenti

Risposta

Aiutino

Soluzione

Presentazione globale del problema N1

Testo Determinare tutte le quadruple di interi non negativi (a, b, c, d) tali che

$$11^a \cdot 5^b - 3^c \cdot 2^d = 1.$$

Provenienza

Link

Difficoltà e/o possibile utilizzo

Commenti

Risposta

Aiutino

Soluzione

Presentazione globale del problema N2

Testo Siano m ed n interi positivi tali che $(2m+1, 2n+1) = 1$.
Dimostrare che

$$(2^{2m+1} + 2^{m+1} + 1, 2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1) \in \{1, 5\}.$$

Provenienza

Link

Difficoltà e/o possibile utilizzo

Commenti

Risposta

Aiutino

Soluzione

Presentazione globale del problema N3

Testo Determinare tutte le coppie (p, n), dove p è un numero primo ed n un intero positivo, tali che

$$p^5 + 4p + 1 = n^2.$$

Provenienza

Link

Difficoltà e/o possibile utilizzo

Commenti

Risposta

Aiutino

Soluzione

Presentazione globale del problema N4

Testo Determinare tutti gli interi positivi k tali che il prodotto dei primi k numeri primi dispari è della forma $a^b + 1$ con $a \geq 1$ e $b \geq 2$.

Provenienza

Link Russia MO 2013, Final Round, 11.3

Difficoltà e/o possibile utilizzo

Commenti

Risposta

Aiutino Escludere che b sia potenza di 2. Ridursi al caso in cui b è primo. Stimare la grandezza di b.

Soluzione

Presentazione globale del problema N5

Testo Siano a, b due interi relativamente primi, e definiamo le successioni di interi $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ mediante la formula

$$(a + b\sqrt{2})^{2n} = a_n + b_n\sqrt{2}.$$

Determinare l'insieme dei numeri primi p per i quali esiste un intero positivo $n \leq p$ tale che $p|b_n$.

Provenienza

Link

Difficoltà e/o possibile utilizzo SudCorea MO 2103, n.5

Commenti

Risposta

Aiutino

Soluzione Distinguere i casi $p|a^2 - 2b^2$ e $p \nmid a^2 - 2b^2$. Considerare anche se 2 è un quadrato modulo p oppure no.

Presentazione globale del problema N6

Testo Determinare tutte le coppie di interi positivi (m, n) tali che $m^6 = n^{n+1} + n - 1$.

Provenienza

Link Turchia TST 2013, n.4

Difficoltà e/o possibile utilizzo

Commenti

Risposta

Aiutino Considerare congruenze con primi piccoli. Inoltre, congruenza modulo $n + 1$. Fattorizzare il termine a destra.

Soluzione

Presentazione globale del problema N7

Testo Determinare tutti gli interi positivi n per i quali ogni coefficiente del polinomio

$$P_n(x) = (x^2 + x + 1)^n - (x^2 + x)^n - (x^2 + 1)^n - (x + 1)^n + x^{2n} + x^n + 1$$

è divisibile per 7.

Provenienza

Link Turchia MO 2006, n.3

Difficoltà e/o possibile utilizzo

Commenti

Risposta

Aiutino Ricordare Fermat. Considerare possibili somme di potenze di 7.

Soluzione

Presentazione globale del problema GST1

Testo Per ogni $k = 1, 2, \ldots, 2014$ poniamo

$$S_k = \sum_{i=k}^{2014} \frac{1}{i} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \ldots + \frac{1}{2014}.$$

Calcolare

$$S_1 + \sum_{k=1}^{2014} S_k^2 = S_1 + S_1^2 + S_2^2 + \ldots + S_{2014}^2.$$

Provenienza

Link

Difficoltà e/o possibile utilizzo

Commenti

Risposta

Aiutino

Soluzione

Presentazione globale del problema GST2

Testo

1. Determinare se è possibile partizionare l'insieme degli interi positivi come unione disgiunta di insiemi A_1, A_2, $\ldots$, A_n, $\ldots$, dove ogni A_i è costituito da 2 elementi la cui somma è $2014 + i$.

2. Determinare se è possibile partizionare l'insieme degli interi positivi come unione disgiunta di insiemi A_1, A_2, $\ldots$, A_n, $\ldots$, dove ogni A_i è costituito da 2 elementi la cui somma è $2014 + i^2$.

Provenienza

Link

Difficoltà e/o possibile utilizzo

Commenti

Risposta

Aiutino

Soluzione

Presentazione globale del problema GST3

Testo Due circonferenze Γ_a e Γ_b, di raggio diverso, si intersecano in due punti M ed N. Una retta t è tangente a Γ_a nel punto A e a Γ_b nel punto B. La perpendicolare a t passante per A interseca MN in C. La perpendicolare a t passante per B interseca MN in D.

1. Dimostrare che il quadrilatero $ACBD$ è un parallelogrammo.
2. Sia E l'ulteriore intersezione tra CA e Γ_a, sia F l'ulteriore intersezione tra CB e Γ_b, sia X l'ulteriore intersezione tra DA e Γ_a, e sia Y l'ulteriore intersezione tra DB e Γ_b.

   Dimostrare che i punti E, F, X, Y sono allineati.

Provenienza

Link

Difficoltà e/o possibile utilizzo

Commenti

Risposta

Aiutino

Soluzione

Presentazione globale del problema GST4

Testo Determinare tutte le terne (p, n, a) in cui p è un numero primo, n ed a sono interi positivi e

$$(2p)^n + 1 = a^3.$$

Provenienza

Link

Difficoltà e/o possibile utilizzo

Commenti

Risposta

Aiutino

Soluzione

Presentazione globale del problema TST1

Testo Sia $\mathbb{Z}_{>0}$ l'insieme degli interi positivi.
Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ tali che

$$[m^2 + f(n)] \quad \text{divide} \quad [mf(m) + n]$$

per ogni coppia di interi positivi m ed n.

Provenienza

Link

Difficoltà e/o possibile utilizzo

Commenti

Risposta

Aiutino

Soluzione

Presentazione globale del problema TST2

Testo Sia ABC un triangolo, e sia ω la sua circonferenza circoscritta. Siano M il punto medio di AB, N il punto medio di AC, T il punto medio dell'arco BC di ω che non contiene A. La circonferenza circoscritta al triangolo AMT interseca l'asse di AC in un punto X interno al triangolo ABC. La circonferenza circoscritta al triangolo ANT interseca l'asse di AB in un punto Y interno al triangolo ABC. Le rette MN e XY si intersecano in K.

Dimostrare che $KA = KT$.

Provenienza

Link

Difficoltà e/o possibile utilizzo

Commenti

Risposta

Aiutino

Soluzione

Presentazione globale del problema TST3

Testo Sia S un insieme di 2000 numeri reali distinti.

Dimostrare che esistono due coppie distinte $(a,b) \in S^2$ e $(c,d) \in S^2$ tali che $a > b$, $c > d$, e

$$\left| \frac{a-b}{c-d} - 1 \right| < \frac{1}{100000}.$$

Nota. Le due coppie possono anche avere un elemento in comune, nel senso che per esempio può accadere che $a = c$ (ma in tal caso necessariamente si deve avere che $b \neq d$).

Provenienza

Link

Difficoltà e/o possibile utilizzo

Commenti

Risposta

Aiutino

Soluzione

Presentazione globale del problema TST4

Testo Per ogni intero positivo n, determinare il più piccolo intero positivo $k(n)$ con questa proprietà.

> Per ogni intero positivo d e per ogni d-upla di numeri reali $(a_1, \ldots, a_d) \in [0,1]^d$ tali $a_1 + \ldots + a_d = n$, è possibile suddividere i d elementi in $k(n)$ gruppi in maniera tale che la somma dei numeri appartenenti ad ogni gruppo sia sempre minore od uguale ad 1.

Nota. Quando si suddividono i d numeri si intende che ogni numero va a finire in uno ed un solo gruppo. Eventuali numeri ripetuti nella d-upla possono finire in gruppi diversi. Alcuni gruppi possono anche rimanere vuoti, ed in tal caso la loro somma si intende nulla.

Provenienza

Link

Difficoltà e/o possibile utilizzo

Commenti

Risposta

Aiutino

Soluzione

Presentazione globale del problema TST5

Testo

1. Dimostrare che non esistono terne (p, q, n) in cui p e q sono primi distinti ed n è un intero positivo tale che
$$p^{q-1} - q^{p-1} = 4n^2.$$

2. Dimostrare che non esistono terne (p, q, n) in cui p e q sono primi distinti ed n è un intero positivo tale che
$$p^{q-1} - q^{p-1} = 4n^3.$$

Provenienza

Link

Difficoltà e/o possibile utilizzo

Commenti

Risposta

Aiutino

Soluzione

Presentazione globale del problema TST6

Testo Sia ABC un triangolo scaleno acutangolo con $CB < CA$, sia D il piede dell'altezza uscente da C, e sia E un punto sull'altezza CD. La circonferenza di diametro CE interseca la circonferenza circoscritta ad ABC in K (oltre che in C), il lato CA in L, e il lato CB in M. Sia N l'intersezione tra le rette KE e AB.

Dimostrare che il quadrilatero $DNML$ è ciclico.

Provenienza

Link

Difficoltà e/o possibile utilizzo

Commenti

Risposta

Aiutino

Soluzione

Parte II

Stampati per le gare

Stage Winter Camp Pisa 2014 – GST

GST1. Per ogni $k = 1, 2, \ldots, 2014$ poniamo

$$S_k = \sum_{i=k}^{2014} \frac{1}{i} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \ldots + \frac{1}{2014}.$$

Calcolare

$$S_1 + \sum_{k=1}^{2014} S_k^2 = S_1 + S_1^2 + S_2^2 + \ldots + S_{2014}^2.$$

GST2. (a) Determinare se è possibile partizionare l'insieme degli interi positivi come unione disgiunta di insiemi A_1, A_2, ..., A_n, ..., dove ogni A_i è costituito da 2 elementi la cui somma è $2014 + i$.

(b) Determinare se è possibile partizionare l'insieme degli interi positivi come unione disgiunta di insiemi A_1, A_2, ..., A_n, ..., dove ogni A_i è costituito da 2 elementi la cui somma è $2014 + i^2$.

GST3. Due circonferenze Γ_a e Γ_b, di raggio diverso, si intersecano in due punti M ed N. Una retta t è tangente a Γ_a nel punto A e a Γ_b nel punto B. La perpendicolare a t passante per A interseca MN in C. La perpendicolare a t passante per B interseca MN in D.

(a) Dimostrare che il quadrilatero $ACBD$ è un parallelogrammo.

(b) Sia E l'ulteriore intersezione tra CA e Γ_a, sia F l'ulteriore intersezione tra CB e Γ_b, sia X l'ulteriore intersezione tra DA e Γ_a, e sia Y l'ulteriore intersezione tra DB e Γ_b.

Dimostrare che i punti E, F, X, Y sono allineati.

GST4. Determinare tutte le terne (p, n, a) in cui p è un numero primo, n ed a sono interi positivi e

$$(2p)^n + 1 = a^3.$$

Modalità di svolgimento della prova: una giornata di gara con 4 problemi e 4 ore e 30 minuti di tempo a disposizione.

Stage Winter Camp Pisa 2014 – Prova finale

Primo giorno

A1. Sia $\mathbb{Z}_{>0}$ l'insieme degli interi positivi.

Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ tali che

$$[m^2 + f(n)] \quad \text{divide} \quad [mf(m) + n]$$

per ogni coppia di interi positivi m ed n.

A2. Sia ABC un triangolo, e sia ω la sua circonferenza circoscritta. Siano M il punto medio di AB, N il punto medio di AC, T il punto medio dell'arco BC di ω che non contiene A. La circonferenza circoscritta al triangolo AMT interseca l'asse di AC in un punto X interno al triangolo ABC. La circonferenza circoscritta al triangolo ANT interseca l'asse di AB in un punto Y interno al triangolo ABC. Le rette MN e XY si intersecano in K.

Dimostrare che $KA = KT$.

A3. Sia S un insieme di 2000 numeri reali distinti.

Dimostrare che esistono due coppie distinte $(a, b) \in S^2$ e $(c, d) \in S^2$ tali che $a > b$, $c > d$, e

$$\left| \frac{a-b}{c-d} - 1 \right| < \frac{1}{100000}.$$

Nota. Le due coppie possono anche avere un elemento in comune, nel senso che per esempio può accadere che $a = c$ (ma in tal caso necessariamente si deve avere che $b \neq d$).

Modalità di svolgimento della prova: 3 problemi al giorno con 4 ore e 30 minuti di tempo a disposizione.

Stage Winter Camp Pisa 2014 – Prova finale

Secondo giorno

B1. Per ogni intero positivo n, determinare il più piccolo intero positivo $k(n)$ con questa proprietà.

> Per ogni intero positivo d e per ogni d-upla di numeri reali $(a_1, \ldots, a_d) \in [0,1]^d$ tali $a_1 + \ldots + a_d = n$, è possibile suddividere i d elementi in $k(n)$ gruppi in maniera tale che la somma dei numeri appartenenti ad ogni gruppo sia sempre minore od uguale ad 1.

Nota. Quando si suddividono i d numeri si intende che ogni numero va a finire in uno ed un solo gruppo. Eventuali numeri ripetuti nella d-upla possono finire in gruppi diversi. Alcuni gruppi possono anche rimanere vuoti, ed in tal caso la loro somma si intende nulla.

B2. (a) Dimostrare che non esistono terne (p, q, n) in cui p e q sono primi distinti ed n è un intero positivo tale che
$$p^{q-1} - q^{p-1} = 4n^2.$$

(b) Dimostrare che non esistono terne (p, q, n) in cui p e q sono primi distinti ed n è un intero positivo tale che
$$p^{q-1} - q^{p-1} = 4n^3.$$

B3. Sia ABC un triangolo scaleno acutangolo con $CB < CA$, sia D il piede dell'altezza uscente da C, e sia E un punto sull'altezza CD. La circonferenza di diametro CE interseca la circonferenza circoscritta ad ABC in K (oltre che in C), il lato CA in L, e il lato CB in M. Sia N l'intersezione tra le rette KE e AB.

Dimostrare che il quadrilatero $DNML$ è ciclico.

Modalità di svolgimento della prova: 3 problemi al giorno con 4 ore e 30 minuti di tempo a disposizione.

GST1	GST2	GST3	GST4

Stage Winter Camp Pisa 2014 – GST

(Cognome) (Nome)

GST1. Per ogni $k = 1, 2, \ldots, 2014$ poniamo

$$S_k = \sum_{i=k}^{2014} \frac{1}{i} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \ldots + \frac{1}{2014}.$$

Calcolare

$$S_1 + \sum_{k=1}^{2014} S_k^2 = S_1 + S_1^2 + S_2^2 + \ldots + S_{2014}^2.$$

GST2. (a) Determinare se è possibile partizionare l'insieme degli interi positivi come unione disgiunta di insiemi A_1, A_2, $\ldots$, A_n, $\ldots$, dove ogni A_i è costituito da 2 elementi la cui somma è $2014 + i$.

(b) Determinare se è possibile partizionare l'insieme degli interi positivi come unione disgiunta di insiemi A_1, A_2, $\ldots$, A_n, $\ldots$, dove ogni A_i è costituito da 2 elementi la cui somma è $2014 + i^2$.

GST3. Due circonferenze Γ_a e Γ_b, di raggio diverso, si intersecano in due punti M ed N. Una retta t è tangente a Γ_a nel punto A e a Γ_b nel punto B. La perpendicolare a t passante per A interseca MN in C. La perpendicolare a t passante per B interseca MN in D.

(a) Dimostrare che il quadrilatero $ACBD$ è un parallelogrammo.

(b) Sia E l'ulteriore intersezione tra CA e Γ_a, sia F l'ulteriore intersezione tra CB e Γ_b, sia X l'ulteriore intersezione tra DA e Γ_a, e sia Y l'ulteriore intersezione tra DB e Γ_b.

Dimostrare che i punti E, F, X, Y sono allineati.

GST4. Determinare tutte le terne (p, n, a) in cui p è un numero primo, n ed a sono interi positivi e

$$(2p)^n + 1 = a^3.$$

A1	A2	A3

Stage Winter Camp Pisa 2014 – Prova finale

Primo giorno

(Cognome) (Nome)

A1. Sia $\mathbb{Z}_{>0}$ l'insieme degli interi positivi.

Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ tali che

$$[m^2 + f(n)] \quad \text{divide} \quad [mf(m) + n]$$

per ogni coppia di interi positivi m ed n.

A2. Sia ABC un triangolo, e sia ω la sua circonferenza circoscritta. Siano M il punto medio di AB, N il punto medio di AC, T il punto medio dell'arco BC di ω che non contiene A. La circonferenza circoscritta al triangolo AMT interseca l'asse di AC in un punto X interno al triangolo ABC. La circonferenza circoscritta al triangolo ANT interseca l'asse di AB in un punto Y interno al triangolo ABC. Le rette MN e XY si intersecano in K.

Dimostrare che $KA = KT$.

A3. Sia S un insieme di 2000 numeri reali distinti.

Dimostrare che esistono due coppie distinte $(a, b) \in S^2$ e $(c, d) \in S^2$ tali che $a > b$, $c > d$, e

$$\left| \frac{a-b}{c-d} - 1 \right| < \frac{1}{100000}.$$

Nota. Le due coppie possono anche avere un elemento in comune, nel senso che per esempio può accadere che $a = c$ (ma in tal caso necessariamente si deve avere che $b \neq d$).

B1	B2	B3

Stage Winter Camp Pisa 2014 – Prova finale

Secondo giorno

(Cognome) (Nome)

B1. Per ogni intero positivo n, determinare il più piccolo intero positivo $k(n)$ con questa proprietà.

> Per ogni intero positivo d e per ogni d-upla di numeri reali $(a_1, \ldots, a_d) \in [0,1]^d$ tali $a_1 + \ldots + a_d = n$, è possibile suddividere i d elementi in $k(n)$ gruppi in maniera tale che la somma dei numeri appartenenti ad ogni gruppo sia sempre minore od uguale ad 1.

Nota. Quando si suddividono i d numeri si intende che ogni numero va a finire in uno ed un solo gruppo. Eventuali numeri ripetuti nella d-upla possono finire in gruppi diversi. Alcuni gruppi possono anche rimanere vuoti, ed in tal caso la loro somma si intende nulla.

B2. (a) Dimostrare che non esistono terne (p, q, n) in cui p e q sono primi distinti ed n è un intero positivo tale che

$$p^{q-1} - q^{p-1} = 4n^2.$$

(b) Dimostrare che non esistono terne (p, q, n) in cui p e q sono primi distinti ed n è un intero positivo tale che

$$p^{q-1} - q^{p-1} = 4n^3.$$

B3. Sia ABC un triangolo scaleno acutangolo con $CB < CA$, sia D il piede dell'altezza uscente da C, e sia E un punto sull'altezza CD. La circonferenza di diametro CE interseca la circonferenza circoscritta ad ABC in K (oltre che in C), il lato CA in L, e il lato CB in M. Sia N l'intersezione tra le rette KE e AB.

Dimostrare che il quadrilatero $DNML$ è ciclico.