Algebra – Problemi di ammissione

A1. Siano a, b e c reali positivi tali che $a^2 + b^2 + c^2 = a^3 + b^3 + c^3$. Dimostrare che vale:

$$\frac{a}{a^2 + b^4 + c^4} + \frac{b}{a^4 + b^2 + c^4} + \frac{c}{a^4 + b^4 + c^2} \geq 1$$

A2. Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$f(x - f(y)) = f(-x) + (f(y) - 2x)f(-y)$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

A3. Dato il polinomio $p(x) = x^2+4x-4$, consideriamo la successione definita per ricorrenza, $a(1) = 1$ e

$$a(n) = \sum_{k=1}^{n-1} p(n-k)a(k), \qquad n \geq 2$$

Si determini il più piccolo $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $a(n) \leq 2015\alpha^n$ per ogni $n \geq 1$.