

UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE

Progetto Olimpiadi della Matematica

GARA di FEBBRAIO



19 febbraio 2015

Da riempirsi da parte dello studente:

Nome: _____ Cognome: _____ Genere: ☐ F ☐ M

Indirizzo: _____ Città: _____

Scuola: _____ Anno di corso: _____ Città: _____

Email: _____ Taglia per eventuale maglietta: ☐ S ☐ M ☐ L ☐ XL

1. Non sfogliare questo fascicoletto finché l'insegnante non ti dice di farlo. **NON È AMMESSO L'UTILIZZO DI CALCOLATRICI, LIBRI DI TESTO E TAVOLE NUMERICHE.** È proibito comunicare con altri concorrenti o con l'esterno; **IN PARTICOLARE, È VIETATO L'USO DI TELEFONI CELLULARI.**
2. La prova consiste di 17 problemi divisi in 3 gruppi.
3. Nei problemi dal numero 1 al numero 12 sono proposte 5 risposte possibili, indicate con **A, B, C, D, E.** **Una sola** delle risposte è corretta. La lettera corrispondente alla risposta corretta dovrà essere riportata, per ogni quesito, in questa pagina nella relativa finestrella più in basso. Ogni risposta **giusta vale 5 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
4. I problemi 13 e 14 richiedono una risposta che è data da un numero intero. Questo numero intero va indicato in questa pagina nella relativa finestrella più in basso. Ogni risposta **giusta vale 5 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
5. I problemi 15, 16 e 17 richiedono invece una dimostrazione. Ti invitiamo a formulare le soluzioni in modo chiaro e conciso usufruendo dello spazio riservato e consegnando soltanto i fogli di questo fascicoletto. Tali problemi verranno valutati con un punteggio **da 0 a 15**.
6. Quando l'insegnante dà il via, comincia a lavorare. Hai **3 ore** di tempo. Buon lavoro!
7. Per correttezza nei confronti di coloro che facessero la gara in momenti diversi della giornata, ti chiediamo di non diffondere informazioni sul testo e sulle risposte prima delle 20 di questa sera. Grazie!

Risposte ai primi 14 quesiti

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Da riempirsi a cura dell'insegnante:

Valutazione esercizi dimostrativi

15

16

17

Punteggio totale

(da foglio di calcolo)

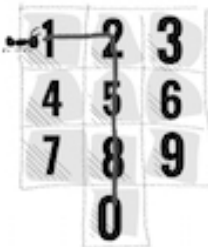
Visitate il sito internet delle olimpiadi:

<http://olimpiadi.dm.unibo.it>

ed il forum delle olimpiadi: <http://www.oliforum.it>

Problemi a risposta multipla – 5 punti

1. Un numero naturale si dice *palindromo* se è uguale al numero che si ottiene leggendo le cifre della sua scrittura in base dieci da destra verso sinistra (ad esempio, 68386 e 44 sono palindromi, 220 non lo è). Sappiamo che il numero naturale x e il numero $x + 312$ sono entrambi palindromi; x ha quattro cifre, mentre $x + 312$ ne ha cinque. Quanto vale la somma delle cifre di x ?
 (A) 30 (B) 31 (C) 32 (D) 33 (E) 34
2. Una sequenza $a_1, \dots, a_{100}$ di numeri reali è tale che la media aritmetica fra due termini consecutivi sia sempre uguale all'indice del secondo termine (ad esempio, si ha $\frac{a_4 + a_5}{2} = 5$); quanto vale la somma dei 100 numeri della sequenza?
 (A) 2550 (B) 5050 (C) 5100 (D) 10100 (E) Non si può determinare: dipende da a_1 .
3. Sia $ABCDE$ un pentagono regolare di lato 1 e sia P l'intersezione tra le diagonali AC e BE . Quanto misura il segmento PC ?
 (A) 1 (B) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (C) $\sqrt{5} - 1$ (D) $4(\sqrt{5} - 2)$ (E) Nessuna delle precedenti.
4. Una formica cammina sul tastierino numerico di un cellulare, composto da 10 pulsanti disposti come in figura. La formica si sposta sempre dal tasto su cui si trova ad un tasto adiacente in orizzontale o in verticale; parte dal tasto 1 e passeggia per un po' sul tastierino, fermandosi infine sul tasto 0, che non aveva mai visitato prima. Consideriamo il numero n ottenuto concatenando le cifre dei tasti su cui è passata la formica, nell'ordine in cui li ha visitati (ad esempio, il percorso in figura corrisponderebbe al numero 12580). Dire quante delle quattro affermazioni seguenti sono certamente vere:



 - “ n **non** è multiplo di 3”;
 - “ n **non** è multiplo di 8”;
 - “ n è composto da un numero dispari di cifre”;
 - “ n **non** è un quadrato”.
 (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4
5. Due polinomi monici (cioè con coefficiente di grado massimo uguale a 1) a coefficienti interi $p(x)$ e $q(x)$ sono tali che il loro massimo comun divisore sia $(x - 1)(x - 2)$, il loro minimo comune multiplo sia $(x - 1)^2(x - 2)^3(x - 3)(x + 1)$ e il grado di $p(x)$ sia minore o uguale al grado di $q(x)$. In quanti modi può essere scelto $p(x)$?
 (A) 4 (B) 5 (C) 8 (D) 10 (E) 12
6. Dato un triangolo ABC , sia A' il simmetrico di A rispetto a C , A'' il simmetrico di A rispetto a B , B' il simmetrico di B rispetto a A , B'' il simmetrico di B rispetto a C , C' il simmetrico di C rispetto a B e C'' il simmetrico di C rispetto a A . Determinare il rapporto tra l'area di $A'B'C'$ e quella dell'esagono $A'A''C'C''B'B''$.
 (A) $\frac{6}{13}$ (B) $\frac{7}{13}$ (C) $\frac{3}{7}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) Dipende dal triangolo iniziale.
7. Per quante quaterne (a, b, c, d) di numeri interi non negativi le tre espressioni $a^2 - c^2$, $b^2 - d^2$ e $ab + bc + cd + da$ sono tutte uguali a 1024?
 (A) 0 (B) 1 (C) 4 (D) 9 (E) 11
8. Dato il triangolo ABC rettangolo in A costruiamo sull'ipotenusa il quadrato $BCDE$ (con D, E dalla parte opposta di A rispetto a BC). Sapendo che le aree dei triangoli ABE e ACD valgono rispettivamente 6 m^2 e 27 m^2 , quanto vale l'area del triangolo ABC ?
 (A) $3\sqrt{2} \text{ m}^2$ (B) 6 m^2 (C) 12 m^2 (D) $9\sqrt{2} \text{ m}^2$ (E) 18 m^2

9. Una pedina si trova inizialmente sulla casella centrale di una scacchiera 5×5 . Un passo della pedina consiste nello spostarsi in una casella scelta a caso fra quelle che hanno *esattamente un vertice* in comune con la casella su cui si trova. Qual è la probabilità che dopo 12 passi la pedina si trovi in uno qualunque degli angoli della scacchiera?
- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{4}{25}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{4}{13}$ (E) $\frac{1}{4}$
10. Caboyara, famoso circense australiano, si esibisce anche quest'anno in un gran trucco. Predispone una scala spettacolare con $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_{2015}$ gradini, dove $p_1, p_2, \dots, p_{2015}$ sono numeri primi distinti; i gradini che corrispondono a divisori di N (compresi il primo e l' N -esimo gradino) sono speciali e sono inizialmente illuminati di verde.
- Durante lo spettacolo, 2015 canguri ammaestrati salgono uno dopo l'altro la scala; per $i = 1, 2, \dots, 2015$, l' i -esimo canguro salta p_i gradini alla volta, partendo ai piedi della scala (salta sul gradino p_i , poi sul $2p_i$, e così via finché non raggiunge il gradino N). Ogni volta che un canguro salta su un gradino speciale, questo cambia colore: da verde diventa rosso, da rosso verde.
- Quanti saranno i gradini speciali illuminati di verde alla fine dell'esibizione?
- (A) $2^{2015} - 2^{1008}$ (B) 2^{2014} (C) $2^{2014} - 2^{1007}$ (D) 2^{2013} (E) $2015 \cdot 2^{1008}$
11. Giovanni disegna a matita un 9-agono regolare e collega ciascuno dei suoi vertici al centro, tracciando un totale di 18 segmenti e ottenendo in questo modo nove triangoli. Ripassa quindi a penna alcuni dei segmenti tracciati, facendo in modo che alla fine ognuno dei nove triangoli abbia esattamente un lato ripassato a penna. In quanti modi Giovanni può scegliere l'insieme dei segmenti da ripassare? (Nota: due insiemi di segmenti che si ottengano l'uno dall'altro per rotazione o per simmetria sono da considerarsi *distinti*.)
- (A) 49 (B) 65 (C) 74 (D) 76 (E) 85
12. Sia $ABCD$ un quadrilatero tale che $AB = 24$, $BC = 20$, $CD = 15$, $DA = 7$, $BD = 25$. Quanto è lungo AC ?
- (A) 18 (B) $14\sqrt{2}$ (C) 20 (D) 21 (E) 24

Problemi a risposta numerica – 5 punti

13. Quanto vale $\sqrt[4]{2^{20} + 2^{27} + 2^{31} + 2^{32} + 2^{37} + 2^{40}}$?
14. Una pulce si trova inizialmente su un vertice di un poligono regolare di 2015 lati; compie una sequenza di salti in senso antiorario: al primo salto si sposta di un vertice (da quello iniziale al vicino), al secondo di tre, al terzo di cinque, e così via, di modo che all' n -esimo parte da un vertice e atterra $2n - 1$ vertici più in là, sempre in senso antiorario. Dopo quanti salti accadrà per la prima volta che la pulce atterri su un vertice che aveva già visitato?

15. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

Camilla ha una scatola che contiene 2015 graffette. Ne prende un numero positivo n e le mette sul banco di Federica, sfidandola al seguente gioco. Federica ha a disposizione due tipi di mosse: può togliere 3 graffette dal mucchio che ha sul proprio banco (se il mucchio contiene almeno 3 graffette), oppure togliere metà delle graffette presenti (se il mucchio ne contiene un numero pari). Federica vince se, con una sequenza di mosse dei tipi sopra descritti, riesce a togliere tutte le graffette dal proprio banco.

- (a) Per quanti dei 2015 possibili valori di n Federica può vincere?
- (b) Le ragazze cambiano le regole del gioco e decidono di assegnare la vittoria a Federica nel caso riesca a lasciare sul banco una singola graffetta. Per quanti dei 2015 valori di n Federica può vincere con le nuove regole?

SOLUZIONE:

Nome: _____ Cognome: _____

16. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

Sia $ABCD$ un quadrilatero convesso tale che $AB = AC = AD$ e $BC < CD$. La bisettrice dell'angolo $\widehat{BAD}$ interseca internamente CD in M e il prolungamento di BC in N . Dimostrare che

- (a) il quadrilatero $ABCM$ è inscrittibile in una circonferenza;
- (b) i triangoli ANB e ABM sono simili.

SOLUZIONE:

17. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

Sia n un intero positivo e siano $1 = d_1 < d_2 < d_3 < \dots < d_k = n$ i suoi divisori positivi, ordinati per grandezza. Si sa che $k \geq 4$ e che $d_3^2 + d_4^2 = 2n + 1$.

- (a) Trovare tutti i possibili valori di k .
- (b) Trovare tutti i possibili valori di n .

SOLUZIONE:

