Funzionale

baden96p

12 marzo 2015

Testo: Trovare tutte le funzioni strettamente monotone $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ che verifichino la relazione

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \tag{1}$$

Svolgimento:
Se $f(x) \equiv k$ allora dalla 1 si avrebbe $k = k + y \quad \forall y \in \mathbb{R}$ che è evidentemente impossibile. Pertanto f non è costante.
Si sostituisca $y = 0$ nella 1, quindi

$$f(x + f(0)) = f(x) \tag{2}$$

Ipotizziamo ora che f sia lineare, da cui $f(x) = ax + b$ e quindi $f(0) = b$. Andiamo a sostituire questa forma nella 2.

$$f(x + f(0)) = f(x) \Rightarrow f(x + b) = ax + b \Rightarrow a(x + b) + b = ax + b \Rightarrow ab = 0$$

poiché $f \not\equiv k$ allora $a \neq 0$ dunque $b = 0$. Pertanto $f(x) = ax$.
Ora si può sostituire nella 1 $f(x) = ax$, quindi

$$f(x + ay) = a(x + ay) = ax + a^2y = ax + y \Rightarrow a = 1 \vee a = -1$$

pertanto $f(x) = x$ oppure $f(x) = -x$